Abgabe in der Vorlesung am Donnerstag, 2017-11-30

Aufgabe 1. Seien $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{S}$, $\phi, \psi : E \to [0, \infty)$ einfache messbare Funktionen, $a, b \geq 0$. Zeigen Sie

(a) Falls $E = \cup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ eine disjunkte Vereinigung messbarer Mengen ist, dann gilt

$$\int_E \phi \mathrm{d}\mu = \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{A_k} \phi \mathrm{d}\mu. \qquad \text{(3 Pkt.)}$$

(b) $a\phi + b\psi$ ist eine einfache Funktion und

$$\int_E (a\phi + b\psi) \mathrm{d}\mu = a \int_E \phi \mathrm{d}\mu + b \int_E \psi \mathrm{d}\mu. \qquad \text{(4 Pkt.)}$$

(c) Falls $\phi \leq \psi$ punktweise, dann gilt $\int_E \phi \mathrm{d}\mu \leq \int_E \psi \mathrm{d}\mu$. (3 Pkt.)

Aufgabe 2. Sei K ein kompakter metrischer Raum.

(a) Seien $A, B \subset K$ disjunkte abgeschlossene Mengen. Zeigen Sie dass eine stetige Funktion $g : K \to [-1, 1]$ mit $g|_A \equiv -1$ und $g|_B \equiv 1$ existiert. (2 Pkt.)

(b) Sei $C \subset K$ abgeschlossen und $f : C \to [-1, 1]$ stetig. Zeigen Sie dass eine stetige Funktion $g : K \to [-1/3, 1/3]$ mit $|f - g| \leq 2/3$ auf C existiert. Hinweis: $A := f^{-1}([-1, -1/3])$. (3 Pkt.)

(c) Sei $C \subset K$ abgeschlossen und $f : C \to [-1, 1]$ stetig. Zeigen Sie dass eine stetige Funktion $\tilde{f} : K \to [-1, 1]$ mit $\tilde{f} = f$ auf C existiert. (3 Pkt.)

(d) Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : C \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie dass eine stetige Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{f} = f$ auf C existiert. (2 Pkt.)

Aufgabe 3. (a) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-messbare Teilmenge mit $\mathcal{L}^n(A) > 0$. Zeigen Sie dass die Menge $A - A = \{a - a' \mid a, a' \in A\}$ eine Umgebung der 0 ist. (3 Pkt.)

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lebesgue-messbare Funktion mit $f(x + y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie dass f in 0 stetig ist. (3 Pkt.)

(c) Sei f wie in Teilaufgabe (b). Zeigen Sie $f(x) = xf(1)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. (3 Pkt.)

(d) Zeigen Sie dass die Aussage (c) ohne die Messbarkeitsvoraussetzung nicht notwendigerweise zutrifft. (1 Pkt.)

Aufgabe 4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei A die Menge der Punkte x in denen die Funktion f differenzierbar ist, das heißt $x \in A$ genau dann wenn $f'(x) = \lim_{h \to 0}(f(x + h) - f(x))/h$ existiert (um Notation zu verkürzen treffen wir für diese Aufgabe die Vereinbarung $h \neq 0$). Zeigen Sie dass die Menge A Borel-messbar ist und $f' : A \to \mathbb{R}$ eine Borel-messbare Funktion ist. Hinweise: definieren Sie $g(x) := \limsup_{k \to \infty} k(f(x + 1/k) - f(x))$ und betrachten Sie $h \in \mathbb{Q}$. (10 Pkt.)