Universität Bonn
Prof. Dr. Sergio Conti
Dr. Pavel Zorin-Kranich

Abgabe in der Vorlesung am Donnerstag, 2017-11-23

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{S}$ eine σ-algebra, $E \in \mathcal{S}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $f : E \to \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie dass folgende Aussagen äquivalent sind: (6 Pkt.)

(a) f ist (komponentenweise) messbar,

(b) $f^{-1}(O) \in \mathcal{S}$ für alle offenen Mengen $O \subset \mathbb{R}^n$,

(c) $f^{-1}(B) \in \mathcal{S}$ für alle Borelmengen $B \subset \mathbb{R}^n$.

Sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig und f erfülle die oben angegebenen äquivalenten Bedingungen. Zeigen Sie dass $g \circ f$ ebenfalls messbar ist. (2 Pkt.)

Aufgabe 2. Sei $\mathcal{S}$ eine σ-algebra, $E \in \mathcal{S}$, $f, g : E \to \mathbb{R}$ messbar. Zeigen Sie dass folgende Funktionen messbar sind:

(a) λf, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$, (2 Pkt.)

(b) $\max(f, g)$, $\min(f, g)$, $|f|$, (2 Pkt.)

(c) $f + g$, $f - g$, (2 Pkt.)

(d) fg. (2 Pkt.)

(e) Sei abweichend $f : E \to [-\infty, \infty]$ messbar. Zeigen Sie $f^{-1}(\{-\infty\}), f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{S}$. (2 Pkt.)

(f) Folgern Sie dass $f + g$ auch messbar ist falls f, g Werte in $[-\infty, \infty]$ annehmen sofern wir die übliche Konvention für Rechnen mit ∞ einsetzen und der Fall $\infty - \infty$ nicht auftritt. (Analoges gilt für alle anderen obigen Funktionen, das soll aber nicht schriftlich überprüft werden.) (2 Pkt.)

Aufgabe 3. Sei X ein lokalkompakter metrischer Raum. Der *Durchmesser* einer nichtleeren Teilmenge $F \subset X$ ist definiert durch $\operatorname{diam}(F) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in F\}$. Für $0 < \alpha, \delta < \infty$ definieren wir

$$\mathcal{H}_\alpha^\delta(E) := \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{diam}(F_j)^\alpha \mid E \subset \cup_{j=1}^\infty F_j, \operatorname{diam} F_j \le \delta \text{ für alle } j\}, E \subseteq X.$$

(a) Zeigen Sie dass $\mathcal{H}_\alpha^\delta$ in δ monoton fallend ist, also $\delta < \delta' \implies \mathcal{H}_\alpha^\delta(E) \ge \mathcal{H}_\alpha^{\delta'}(E)$. (1 Pkt.)

(b) Zeigen Sie dass jedes $\mathcal{H}_\alpha^\delta$ ein äußeres Maß auf X ist. (2 Pkt.)

(c) Zeigen Sie dass $\mathcal{H}_\alpha^*(E) := \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\alpha^\delta(E)$ ein äußeres Maß auf X definiert (genannt das *α-dimensionale äußere Hausdorffmaß*). (2 Pkt.)

(d) Zeigen Sie dass alle offenen Mengen bezüglich $\mathcal{H}_\alpha^*$ messbar sind (Hinweis: Carathéodory-Kriterium). (3 Pkt.)

(e) Seien $0 < \alpha < \beta < \infty$. Zeigen Sie $\mathcal{H}_\alpha^*(E) < \infty \implies \mathcal{H}_\beta^* = 0$ und $\mathcal{H}_\beta^*(E) > 0 \implies \mathcal{H}_\alpha^* = \infty$. (3 Pkt.)

(f) Die *Hausdorffdimension* einer Menge $S \subset X$ ist definiert durch $\dim_{\mathrm{H}}(S) = \inf\{\alpha > 0 \mid \mathcal{H}_\alpha^*(S) = 0\}$. Zeigen Sie $\dim_{\mathrm{H}}([0, 1]^d) = d$ für $d \in \mathbb{N}$. (3 Pkt.)

(g) Man nehme an dass X σ-kompakt ist, das heißt $X = \cup_{n=1}^\infty X_n$ mit X_n kompakt. Zeigen Sie dass $\mathcal{H}_\alpha^*$ auf X von innen und von außen regulär ist. (3 Pkt.)

(h) Sei $C \subset [0, 1]$ die Cantormenge (s. Übungsblatt 4) und $\alpha = \log_3 2$. Zeigen Sie $\dim_{\mathrm{H}}(C) = \alpha$ und dass $\mathcal{H}_\alpha^*$ ein Radonmaß auf C ist. (3 Pkt.)

(i) Seien X, Y lokalkompakte metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Hölder-stetige Funktion mit Exponent γ, das heißt $d(f(x), f(x')) \le M d(x, x')^\gamma$. Zeigen Sie $\mathcal{H}_\alpha^*(f(E)) \le M^\alpha \mathcal{H}_{\alpha\gamma}^*(E)$ für alle $E \subset X$. (3 Pkt.)

(j) Sei $f : C \to [0, 1]$ Hölder-stetig mit Exponent γ und surjektiv. Zeigen Sie $\gamma \le \log_3 2$. (2 Pkt.)

Korrektur: in Teilaufgabe g braucht man die zusätzliche Annahme dass $\mathcal{H}_\alpha^*$ lokal endlich ist, d.h. jedes $x \in X$ ist in einer offenen Menge U mit $\mathcal{H}_\alpha^*(U) < \infty$ enthalten. Diese Annahme ist z.B. für $\mathcal{H}_1^*$ auf $\mathbb{R}^2$ nicht erfüllt.