Universität Bonn
Prof. Dr. Sergio Conti
Dr. Pavel Zorin-Kranich

Abgabe in der Vorlesung am Donnerstag, 2017-11-16

Aufgabe 1. Seien $A \subset \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^n$. In dieser Aufgabe vereinbaren wir $0 \cdot \infty := 0$.

(a) Zeigen Sie $\mathcal{L}^{(m+n)*}(A \times B) \le \mathcal{L}^{m*}(A)\mathcal{L}^{n*}(B)$. (4 Pkt.)

(b) Man nehme an dass A, B Lebesgue-messbar sind. Zeigen Sie dass $A \times B$ auch Lebesgue-messbar ist und $\mathcal{L}^{m+n}(A \times B) = \mathcal{L}^m(A)\mathcal{L}^n(B)$. (6 Pkt.)

Aufgabe 2. Sei $T = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} + \lambda e_i \otimes e_j$, $i \neq j$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader. Zeigen Sie $\mathcal{L}^*(TQ) \le \mathcal{L}(Q)$, wobei $TQ = \{Tx \mid x \in Q\}$. (4 Pkt.)

(b) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie $\mathcal{L}^*(TA) \le \mathcal{L}^*(A)$. (3 Pkt.)

(c) Folgern Sie aus der letzten Teilaufgabe dass $\mathcal{L}^*(TA) = \mathcal{L}^*(A)$ sowie dass TA genau dann Lebesgue-messbar ist wenn A Lebesgue-messbar ist. (3 Pkt.)

Aufgabe 3. (a) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar und $f : A \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz. Zeigen Sie dass $f(A)$ ebenfalls Lebesgue-messbar ist. (3 Pkt.)

(b) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und $f : A \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitzfunktion mit Lipschitzkonstante L. Zeigen Sie $\mathcal{L}^*(f(A)) \le CL^n\mathcal{L}^*(A)$ mit einer dimensionsabhängigen Konstante C. (3 Pkt.)

(c) (Spezialfall eines Satzes von Morse) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig defferenzierbar und $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f'(x) = 0\}$. Zeigen Sie $\mathcal{L}(f(A)) = 0$. Hinweis: betrachten Sie eine Umgebung von A. (4 Pkt.)

Aufgabe 4. (a) Finden Sie eine Umgebung U von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ sodass $\mathbb{R} \setminus U$ positives Lebesgue-Maß hat. Insbesondere ist das Innere von $\mathbb{R} \setminus U$ leer. (2 Pkt.)

(b) (Borel-Cantelli) Seien $A_k \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar und $\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}(A_k) < \infty$. Sei $A = \limsup_k A_k := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \in A_k \text{ für unendlich viele } k\}$. Zeigen Sie $\mathcal{L}(A) = 0$. (4 Pkt.)

(c) Gibt es eine σ-Algebra die als Menge abzählbar unendlich ist? (4 Pkt.)