Abgabe in der Vorlesung am Donnerstag, 2017-11-09
Ab diesem Übungsblatt bitten wir Sie Zweiergruppen zu bilden. Es sollte ersichtlich sein dass beide Gruppenmitglieder jeweils einen substantiellen Teil (in der Regel ≥ 10 Punkte) der Abgabe aufgeschrieben haben. Wir ermutigen Sie weiterhin auch in größeren Gruppen zu diskutieren.

Aufgabe 1. Für eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$, Zahl $a \in \mathbb{R}$, und Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir

$$aA = \{ax | x \in A\}, \quad A + b = \{x + b | x \in A\}, \quad aA + b = (aA) + b.$$

Zeigen Sie

(a) Für alle A, a, b wie oben mit $a \geq 0$ gilt $\mathcal{L}^*(aA + b) = a^n \mathcal{L}^*(A)$. (5 Pkt.)

(b) Ist A Lebesgue messbar, so ist $aA + b$ auch Lebesgue messbar. (5 Pkt.)

Aufgabe 2 (Cantorfunktion und Cantormenge)**.** Man definiere eine Folge von Funktionen $f_n : [0,1] \to [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, induktiv wie folgt:

$$f_0(x) := x, \quad f_{n+1}(x) := \begin{cases} f_n(3x)/2, & x \leq 1/3, \\ 1/2, & 1/3 < x < 2/3, \\ f_n(3x-2)/2 + 1/2, & 2/3 \leq x. \end{cases}$$

Weiterhin definiere man eine Folge von Mengen mit $C_0 := [0,1]$ und $C_{n+1} := \frac{1}{3}C_n \cup (\frac{1}{3}C_n + \frac{2}{3})$.

(a) Skizzieren Sie f_0, f_1, f_2 sowie C_0, C_1, C_2. (2 Pkt.)

Zeigen Sie für $n \geq 0$ folgende Aussagen.

(b) $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$, die Funktion f_n ist stetig und monoton steigend. (5 Pkt.)

(c) $\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq 2^{-n}/6$. (3 Pkt.)

(d) $C_{n+1} \subseteq C_n$. (2 Pkt.)

(e) $\mathcal{L}(C_n) = (2/3)^n$. (2 Pkt.)

Nach Teilaufgabe **??** konvergiert die Folge (f_n) insbesondere gleichmäßig gegen einen Grenzwert f, genannt *Cantorfunktion*. Sei außerdem $C := \cap_{n \in \mathbb{N}} C_n$, genannt *Cantormenge*.

(f) Zeigen Sie $\mathcal{L}(C) = 0$. (1 Pkt.)

(g) Zeigen Sie für die Cantorfunktion f die Funktionalgleichung

$$f(x) = \begin{cases} f(3x)/2, & x \leq 1/3, \\ 1/2, & 1/3 < x < 2/3, \\ f(3x-2)/2 + 1/2, & 2/3 \leq x. \end{cases} \qquad (2 \text{ Pkt.})$$

(h) Zeigen Sie $f(C_n) = [0,1]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (3 Pkt.)

(i) Zeigen Sie dass die Cantorfunktion f monoton ist. (1 Pkt.)

(j) Zeigen Sie dass die Menge $B := \{b \in [0,1] : \# f^{-1}(b) > 1\}$ höchstens abzählbar ist. (3 Pkt.)

(k) Zeigen Sie dass $[0,1] \setminus f(C)$ eine Nullmenge ist. (3 Pkt.)

Tatsächlich gilt $f(C) = [0,1]$, das soll hier aber nicht gezeigt werden um zusätzliche Notation zu vermeiden.

(l) Zeigen Sie $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\alpha$ für alle $x, y \in [0,1]$, wobei $\alpha = \log_3 2$. (5 Bonuspkt.)

Man sagt dass f *Hölder-stetig mit Exponent* α ist.