Wintersemester 2017/18 | Universität Bonn
Analysis 3 | Prof. Dr. Sergio Conti
Übungsblatt | Dr. Pavel Zorin-Kranich

Präsenzübung, keine Abgabe
Besprechung in den Übungsgruppen der KW 42 (16.-20.10.2017)

Aufgabe 1. Sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Zeigen Sie dass die Abbildung $f^{-1} : P(Y) \to P(X)$, $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$, mit $\cup$ und $\cap$ vertauscht in dem Sinn dass

$$f^{-1}(\cup_{i\in I} B_i) = \cup_{i\in I} f^{-1}(B_i), \quad f^{-1}(\cap_{i\in I} B_i) = \cap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$$

für beliebige Indexmengen I. Zeigen Sie dass eine analoge Aussage für die Abbildung $A \mapsto f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ nicht zutrifft.

Aufgabe 2. Geben Sie eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ und eine abgeschlossene Menge $V \subset \mathbb{R}$ an sodass $f(U)$ nicht offen und $f(V)$ nicht abgeschlossen ist.

Aufgabe 3. Finden Sie eine 2-Parameter-Folge $(a)_{n,m\in\mathbb{N}}$ sodass $\sum_m a_{n,m} = 0$ für alle n und $\sum_n a_{n,m} = 1/m$ für alle m ist, wobei alle diese Reihen absolut konvergieren. Warum ist $\sum_{n,m} a_{n,m}$ nicht wohldefiniert?

Aufgabe 4. Sei X ein metrischer Raum. Zeigen Sie

(a) Jede abgeschlossene Menge $V \subset X$ ist ein abzählbarer Schnitt offener Mengen.

(b) Jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist eine abzählbare Vereinigung kompakter Mengen.

(c) Eine Teilmenge $W \subset X$ heißt *dicht* falls für alle $U \subset X$ offen und nicht leer auch $W \cap U$ nicht leer ist. Sei X vollständig und $W_1, W_2, \dots \subset X$ offen und dicht. Zeigen Sie dass $\cap_{n=1}^{\infty} W_n$ ebenfalls dicht ist.

(d) Finden Sie eine Teilmenge $V \subset \mathbb{R}$ die kein abzählbarer Schnitt offener Mengen ist. Hinweis: kann die Menge im Beispiel von Vitali dicht gewählt werden?