Sommersemester 2017 | Universität Bonn
Komplexe analysis | Prof. Dr. Sergio Conti
Übungsblatt 11 | Dr. Pavel Zorin-Kranich

Abgabe in der Vorlesung am Montag, 2017-07-10

Aufgabe 1. Seien $f_n : [0,1] \to \mathbb{C}$, $f_n(x) = e^{2\pi i n x}$. Zeigen Sie dass keine Teilfolge von $(f_n)_n$ punktweise konvergiert. (5 Pkt.)

Aufgabe 2. Man bezeichne einen Kreisring mit $K_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$.

(a) Entwickeln Sie die Funktion

$$\frac{1}{z(z-1)}$$

in eine Laurentreihe auf dem Kreisring $K_{0,1}(0)$ (2 Pkt.)

(b) und $K_{1,\infty}(0)$ (3 Pkt.)

Aufgabe 3. Sei $f : B_1(0) \to B_1(0)$ eine holomorphe Funktion.

(a) Zeigen Sie dass

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}, \quad z \in B_1(0).$$ (6 Pkt.)

(b) Zeigen Sie dass f eine Möbiustransformation ist falls in der obigen Ungleichung Gleichheit eintritt. (4 Pkt.)

Aufgabe 4 (Integrallogarithmus)**.** Der *Integrallogarithmus* ist die Funktion

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

Zeigen Sie dass für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathrm{Li}(x) = \sum_{n=1}^{N} (n-1)! \frac{x}{(\log x)^n} + O\Big(\frac{x}{(\log x)^{N+1}}\Big)$$

Hinweis: benutzen Sie paritelle Integration. (10 Pkt.)

Aufgabe 5 (Doppelverhältnis)**.** (a) Seien $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}^*$ vier paarweise verschiedene Punkte. Ihr *Doppelverhältnis* ist definiert als

$$(x_1, x_2; x_3, x_4) := \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)}$$

falls alle x_i von ∞ verschieden sind. Falls ein $x_i = \infty$ ist, sind beide Klammern in denen x_i vorkommt in der Definition zu streichen (dies ist die stetige Fortsetzung der obigen Definition auf den Bereich $\{x_i = \infty\}$ falls $\mathbb{C}^*$ mit der Topologie der Einpunkt-Kompaktifizierung von $\mathbb{C}$ versehen wird). Zeigen Sie dass das Doppelverhältnis unter Möbiustransformationen erhalten bleibt, das heißt, für jedes Tripel paarweise verschiedener Punkte $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}^*$ und jede Möbiustransformation ϕ gilt

$$(\phi(x_1), \phi(x_2); \phi(x_3), \phi(x_4)) = (x_1, x_2; x_3, x_4).$$ (5 Pkt.)

(b) Zeigen Sie dass vier paarweise verschiedene Punkte in $\mathbb{C}^*$ genau dann auf einem verallgemeinerten Kreis liegen wenn ihr Doppelverhältnis reell ist. (5 Pkt.)