Universität Bonn
Prof. Dr. Sergio Conti
Dr. Pavel Zorin-Kranich

Abgabe in der Vorlesung am Montag, 2017-07-03

Aufgabe 1. Sei $k \in \{1, 2, 3\}$ und $\lambda > 1$. Zeigen Sie dass die Gleichung $e^{-z} + z^k = \lambda$ in der rechten Halbebene $\{\Re z > 0\}$ genau eine Lösung besitzt und dass diese Lösung reell ist. (10 Pkt.)

Aufgabe 2 (Kreistreue der Möbiustransformationen)**.** Die *Riemannsche Kugel* und die *Möbiustransformationen* wurden auf dem Übungsblatt 4 definiert. Ein *verallgemeinerter Kreis* in der Riemannschen Kugel $\mathbb{C}^*$ ist entweder ein Kreis in $\mathbb{C}$ oder die Vereinigung einer Geraden in $\mathbb{C}$ mit dem Punkt ∞.

(a) Zeigen Sie dass jede Möbiustransformation als Verkettung affiner Transformationen und der Inversion $z \mapsto \frac{1}{z}$ geschrieben werden kann. (3 Pkt.)

(b) Zeigen Sie dass das Bild eines verallgemeinerten Kreises unter einer Möbiustransformation wieder ein verallgemeinerter Kreis ist. (4 Pkt.)

(c) (Die Gruppe der Möbiustransformationen wirkt auf $\mathbb{C}^*$ scharf dreifach transitiv) Seien $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}^*$ drei paarweise verschiedene Punkte. Geben Sie die Formel für eine Möbiustransformation ϕ mit $\phi(x_1) = 0$, $\phi(x_2) = 1$, $\phi(x_3) = \infty$ an. Zeigen Sie dass eine Möbiustransformation mit diesen Eigenschaften eindeutig bestimmt ist. (3 Pkt.)

Aufgabe 3. Ein *Fixpunkt* einer Funktion f ist ein Punkt z mit $f(z) = z$.

(a) Sei $f : B_1(0) \to B_1(0)$ eine holomorphe Funktion mit mindestens 2 verschiedenen Fixpunkten. Zeigen Sie dass f die Identität ist. (5 Pkt.)

(b) Finden Sie eine bijektive holomorphe Funktion $f : B_1(0) \to B_1(0)$ die keine Fixpunkte besitzt. (5 Pkt.)

Aufgabe 4. Für $z > 0$ definiere man

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t.$$

(a) Zeigen Sie die Funktionalgleichung

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z).$$ (2 Pkt.)

(b) Zeigen Sie $\Gamma(n + 1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}$. (2 Pkt.)

(c) Zeigen Sie dass Γ zu einer holomorphen Funktion auf der rechten Halbebene $\{\Re z > 0\}$ fortgesetzt werden kann und dass die Fortsetzung ebenfalls die obige Funktionalgleichung erfüllt. (3 Pkt.)

(d) Zeigen Sie mithilfe der Funktionalgleichung dass Γ zu einer meromorphen Funktion auf $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden kann. (3 Pkt.)