Universität Bonn
Prof. Dr. Sergio Conti
Dr. Pavel Zorin-Kranich

Abgabe in der Vorlesung am Montag, 2017-05-22

Aufgabe 1 (Fresnelintegrale)**.** Zeigen Sie dass

$$\int_0^\infty \sin(x^2)dx = \int_0^\infty \cos(x^2)dx = \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}.$$

Wenden Sie dazu den Cauchy-Integralsatz auf die Funktion e^{-z^2} und den Pfad der aus den Liniensegmenten $(0,R)$ und $(0,Re^{i\pi/4})$ sowie dem Kreissegment zwischen R und $Re^{i\pi/4}$ besteht an. (10 Pkt.)

Aufgabe 2 (Weierstraßscher Konvergenzsatz)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge. Eine Folge von Funktionen $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ konvergiert gegen eine Fuktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$

- *lokal gleichmäßig* falls für jedes $z \in \Omega$ ein $r > 0$ existiert sodass $\lim_{n\to\infty} \sup_{w\in B(z,r)} |f_n(w) - f(w)| = 0$.
- *in* L^1_{loc} falls für jedes $z \in \Omega$ ein $r > 0$ existiert sodass $\lim_{n\to\infty} \int_{w\in B(z,r)} |f_n(w) - f(w)| = 0$.

Man nehme an dass die Folge f_n aus holomorphen Funktionen $\Omega \to \mathbb{C}$ bestehe.

(a) Zeigen Sie dass, falls $f_n \to f$ lokal gleichmäßig konvergieren, der Grenzwert f ebenfalls eine holomorphe Funktion ist. (5 Pkt.)

(b) Man nehme an dass $f_n \to f$ in L^1_{loc}. Zeigen Sie dass dann eine Funktion $\tilde{f}$ existiert sodass $f_n \to \tilde{f}$ lokal gleichmäßig und $\tilde{f} = f$ fast überall. (5 Pkt.)

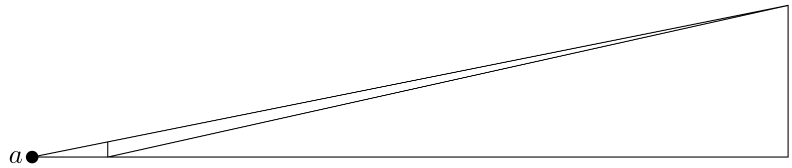
Aufgabe 3 (Satz von Goursat, verallgemeinerte Version)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und konvex und γ eine Dreieckskurve in Ω. Sei weiterhin $A \subset \Omega$ und $f \in C^0(\Omega, \mathbb{C})$ eine stetige Funktion die in allen $z \in \Omega \setminus A$ komplex differenzierbar ist. Zeigen Sie $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$ jeweils unter den folgenden Annahmen:

(a) $A = \{a\}$ und a ist ein Eckpunkt von γ, (5 Pkt.)

(b) $A = \{a\}$, (2 Pkt.)

(c) oder A endlich. (3 Pkt.)

Hinweis: für $A = \emptyset$ ist die Aussage bereits bekannt. Beachten Sie das Bild.



Aufgabe 4 (Cauchy-Hauptwert)**.** Der *Cauchy-Hauptwert* (engl. *principal value*) in 0 eines Integrals ist definiert durch

$$\text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{R\to\infty} \int_{1/R<|t|<R} f(t)\mathrm{d}t.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Cauchy-Integralsatzes dass

$$\text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\xi}}{t}\mathrm{d}t = i\pi\,\mathrm{sign}(\xi), \qquad \mathrm{sign}(\xi) = \begin{cases} -1, & \xi < 0 \\ 0, & \xi = 0 \\ 1, & \xi > 0. \end{cases}$$

Hinweis: ergänzen Sie dazu den Integrationsbereich durch zwei Halbkreise. Das Integral über einen der zwei in Frage kommenden großen Halbkreise ist für festes ξ viel leichter abzuschätzen als über den anderen. (10 Pkt.)