

## 4 Das Itô-Integral

Eine gewöhnliche Differentialgleichung der  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$  kann man auch in der Form  $x(t) = x_0 + \int_{x_0}^t f(s, x(s)) ds$  schreiben. Anders gesagt kann man nur von einer Lösung  $x$  sprechen, wenn man die Funktion  $t \mapsto \int_0^t f(s, x(s)) ds$  definieren kann. Aus diesem Grund studieren wir zunächst Integrale der Form  $\int_0^t X_s dB_s$ , bevor wir stochastische Differentialgleichungen der Art  $dX_t = \sigma(X_t)dB_t + \mu(X_t) dt$  untersuchen.

### 4.1 Was alles schief gehen könnte.

Wie auch beim Lebesgue-Integral werden wir den Ausdruck  $(X \cdot B)_t = \int_0^t X_s dB_s$  definieren, indem wir den stochastischen Prozess  $X$  durch sogenannte Treppen-Prozesse  $X^n$  approximieren. Diese sind auf gegebenen Zeitintervallen konstant, aber natürlich immer noch zufällig. Deswegen wollen wir zunächst eine diskrete Version des Integrals  $\int_0^t X_s dB_s$  studieren. Für zwei gegebene zeit-diskrete Prozesse  $X$  (den Integranden) und  $H$  (den Integrator) definieren wir

$$(X \cdot H)_n = \sum_{k=1}^n X_k (H_k - H_{k-1}).$$

Wie eben bereits erwähnt, treten solche Summen bei der Definition von  $(X \cdot B)_t = \int_0^t X_s dB_s$  auf. Wir wollen  $(X \cdot H)_n$  als Gesamtgewinn eines Spiels bis zum Zeitpunkt  $n$  interpretieren.  $H$  stellen wir uns dabei als irgendeinen Preisprozess und  $X$  als einen Prozess zu wählender Multiplikatoren  $X_k \in \mathbb{R}$  vor. Das Spiel sei nun derart gestaltet, dass der Spieler im Zeitpunkt  $k$  den Betrag  $X_k(H_k - H_{k-1})$  erhält, der auch negativ sein kann. Die Größe  $(X \cdot H)_n$  beschreibt dann den Gesamtgewinn bis zum Zeitpunkt  $n$ . Es gilt nun folgender bemerkenswerter Zusammenhang:

**Satz 4.1** *Seien  $H$  ein  $(\mathcal{F}_n)$ -Martingal und  $X$  ein  $(\mathcal{F}_n)$ -vorhersagbarer Prozess, d. h.  $X_n$  ist  $\mathcal{F}_{n-1}$ -messbar  $\forall n$ . Weiterhin gelte  $|X_n| \leq K \in \mathbb{R}$   $\mathbb{P}$ -fast sicher für alle  $n$ . Dann ist  $(X \cdot H)$  ein  $(\mathcal{F}_n)$ -Martingal.*

**Beweis:** Da sowohl  $X$  als auch  $H$   $(\mathcal{F}_n)$ -adaptiert sind, ist auch  $(X \cdot H)$  adaptiert an  $(\mathcal{F}_n)$ . Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((X \cdot H)_{n+1} | \mathcal{F}_n) &= (X \cdot H)_n + \mathbb{E}(X_{n+1}(H_{n+1} - H_n) | \mathcal{F}_n) \\ &= (X \cdot H)_n + X_{n+1} \mathbb{E}(H_{n+1} - H_n | \mathcal{F}_n) = (X \cdot H)_n,\end{aligned}$$

und insbesondere  $\mathbb{E}(|(X \cdot H)_n|) < \infty \forall n$ . Der Satz ist bewiesen.  $\blacksquare$

Das Resultat besagt, dass der diskrete Integralprozess  $(X \cdot H)$  die Martingaleigenschaft von  $H$  erbt, dies allerdings unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass  $X$  vorhersagbar ist. Wir zeigen in einem Beispiel, dass diese Voraussetzung hierzu notwendig ist.

Sei  $(\xi_k)$  eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen  $\Omega \rightarrow \{-1, 1\}$  mit  $\mathbb{P}(\xi_j = 1) = \mathbb{P}(\xi_j = -1) = \frac{1}{2} \forall j$ . Seien  $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$  und  $H_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ . Dann ist  $H$  an  $(\mathcal{F}_n)$  adaptiert. Sei nun  $X$  ein Prozess mit  $X_k \in \mathbb{Z} \forall k$ . Dann bedeutet die Voraussetzung  $X_k \in \mathcal{F}_{k-1} \forall k$ , dass  $X_k$  alleine in Abhängigkeit der bis zum Zeitpunkt  $k-1$  (inklusive) eingetretenen Ereignisse gewählt werden darf. In unserem Beispiel besteht die Filtration  $(\mathcal{F}_n)$  aus  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ ,  $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, M_1, M_2\}$  mit  $M_1 \subset \Omega$ ,  $M_2 = \Omega \setminus M_1$  und

$$\mathcal{F}_2 = \sigma\left(\{\emptyset, \Omega, M_1, M_2, M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22}\}\right),$$

wobei  $M_{11} \subset M_1$ ,  $M_{12} = M_1 \setminus M_{11}$ ,  $M_{21} \subset M_2$ ,  $M_{22} = M_2 \setminus M_{21}$ .  $X_1$  kann nur dann  $\mathcal{F}_0$ -messbar sein, wenn  $X_1(\omega) = x^0 \forall \omega \in \Omega$  mit einem geeigneten  $x^0 \in \mathbb{Z}$  gilt.  $X_2$  kann nur dann  $\mathcal{F}_1$ -messbar sein, wenn  $X_2(\omega) = x_1^1 \forall \omega \in M_1$  und  $X_2(\omega) = x_2^1 \forall \omega \in M_2$  mit geeigneten  $x_1^1, x_2^1 \in \mathbb{Z}$  gilt. Das heißt,  $X_2$  ist deterministisch auf  $M_1$  und  $M_2$ . Dies veranschaulicht die oben bereits eingeführte Sprechweise

$$(X_k \in \mathcal{F}_{k-1} \forall k) \quad \Leftrightarrow \quad \text{„}X \text{ ist vorhersagbar bzgl. } (\mathcal{F}_n)\text{“}.$$

Sei nun  $X_k = \xi_k$ . Dann ist  $X$  nicht vorhersagbar bzgl.  $(\mathcal{F}_n)$ , und es folgt  $(X \cdot H)_n = n$ , somit ist  $(X \cdot H)$  kein Martingal mehr. Man mache sich klar, dass die Wahl  $X_k = \xi_k$  in unserem Beispiel vollkommen inakzeptabel ist, da der Multiplikator  $X_k$  in Abhängigkeit vom Spielausgang  $\xi_k = H_k - H_{k-1}$  gewählt wird.

Wir treffen nun folgende Vereinbarung: Bei der Konstruktion des stochastischen Integrals  $(X \cdot B)$  wollen wir erreichen, dass  $\{(X \cdot B)_t; t \geq 0\}$  die Martingaleigenschaft der Brownschen Bewegung  $B$  erbt und selbst ein Martingal ist. Es ist wichtig festzustellen, dass dies eine a-priori-Entscheidung ist, die wir treffen, um eine gewisse Interpretation des stochastischen Integrals zu erreichen. Es ist ebenfalls möglich,

andere gewünschte Eigenschaften des Integrals zu fordern und somit ein anderes Integral zu konstruieren.

Damit  $(X \cdot B)$  ein Martingal sein kann, muss  $X$  also gute Messbarkeitseigenschaften besitzen. Für zeit-kontinuierliche Prozesse ist dies ein diffiziles Thema, das wir hier recht knapp behandeln.

**Definition 4.2**  $X = \{X_t; t \geq 0\}$  heißt "progressiv messbar" bzgl. der Filtration  $(\mathcal{F}_t)$ , wenn für jedes  $t > 0$  die Abbildung  $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$  von  $[0, t] \times \Omega$  nach  $\mathbb{R}$  messbar bezüglich  $\mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t$  ist.

**Satz 4.3** Es gelten die folgenden guten Eigenschaften.

1. Adaptierte Prozesse mit links-stetigen Pfaden oder mit rechts-stetigen Pfaden sind progressiv messbar.

2. Wenn  $X$  progressiv messbar und  $T$  eine Stoppzeit ist, so ist die Zufallsvariable  $\omega \mapsto X_{T(\omega)}(\omega)$  als Abbildung von  $\{T < \infty\}$  messbar bezüglich  $\mathcal{F}_T$ .

3. Wenn  $X$   $(\mathcal{F}_t)$ -progressiv messbar und  $T$  eine  $(\mathcal{F}_t)$ -Stoppzeit ist, so ist der durch  $X_t^T(\omega) = X_{t \wedge T}(\omega)$  definierte "gestoppte" Prozess  $X^T$  progressiv messbar bzgl. der Filtration  $(\mathcal{F}_{t \wedge T})$ .

Man könnte nun geneigt sein, das stochastische Integral  $(X \cdot B)_t$  in Form eines sogenannten Stieltjes<sup>27</sup>-Integrals zu definieren. Da die Pfade einer Brownschen Bewegung aber von unbeschränkter Variation sind, ist dies zumindest pfadweise nicht möglich.

Für einen stochastischen Prozess  $X = \{X_t; t \geq 0\}$  definieren wir den Variationsprozess  $V$  mittels

$$V_t = \sup_{\Delta \in \mathcal{S}} \sum_{j=0}^{N-1} |X_{t_{j+1}} - X_{t_j}|, \quad N = \#\Delta - 1,$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \Delta; \exists N \in \mathbb{N} : \Delta = \{t_k \in [0, t]; k = 0, \dots, N \text{ und } t_0 = 0, t_N = t, t_i \leq t_{i+1} \forall i\} \right\}.$$

Den folgenden Satz hätten wir bereits in Kapitel 3 beweisen können. Aufgrund der obigen Bemerkung zu Stieltjes-Integralen passt er aber auch sehr gut hierhin.

<sup>27</sup>Thomas Jan Stieltjes, 1856 (Zwolle/Niederlande) - 1894 (Toulouse), arbeitete u. a. über Kettenbrüche, die Gamma-Funktion, elliptische Funktionen und Integrationstheorie

**Satz 4.4** Wenn  $X$  ein  $(\mathcal{F}_t)$ -Martingal mit stetigen Pfaden ist und für den zugehörigen Variationsprozess  $V$  die Größe  $V_t(\omega)$  für  $\mathbb{P}$ -fast alle  $\omega \in \Omega$  und alle  $t \geq 0$  endlich ist, so ist  $X$  bereits konstant.

**Beweis:** O. B. d. A. gelte  $X_0 = 0$   $\mathbb{P}$ -fast sicher. Wir nehmen zunächst an, dass ein  $V_0 > 0$  existiert, für welches  $V_t \leq V_0$   $\mathbb{P}$ -fast sicher für alle  $t$  gilt. Sei  $\Delta = \{t_0, \dots, t_N\}$  eine Zerlegung mit  $t_0 = 0$  und  $t_N = t$ . Dann gilt unter Verwendung von (3.6) im Fall deterministischer Stoppzeiten

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X_t)^2) &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{N-1} (X_{t_{j+1}})^2 - (X_{t_j})^2\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{N-1} (X_{t_{j+1}} - X_{t_j})^2\right) \\ &\leq \mathbb{E}\left(\left(\sup_{0 \leq j \leq N-1} |X_{t_{j+1}} - X_{t_j}|\right) V_t\right) \leq V_0 \mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq j \leq N-1} |X_{t_{j+1}} - X_{t_j}|\right). \end{aligned}$$

Sei nun  $(\Delta^n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge immer feiner werdender Zerlegungen, d. h. für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert  $\max_{t_{j+1}, t_j \in \Delta^n} |t_{j+1} - t_j|$  gegen 0. Dann konvergiert der Ausdruck auf der rechten Seite gegen Null, und es folgt  $X_0 = 0$   $\mathbb{P}$ -fast sicher. Wenn es keine Schranke  $V_0$  der obigen Art gibt, so definieren wir eine  $(\mathcal{F}_t)$ -Stoppzeit  $T_n$  mittels  $T_n(\omega) = \inf\{t; V_t \geq n\}$ . Der gestoppte Prozess  $X^{T_n} = \{X_{t \wedge T_n}; t \geq 0\}$  ist dann nach Korollar 3.16 wieder ein Martingal und erfüllt  $V_t^{T_n}(\omega) \leq n \forall t$   $\mathbb{P}$ -fast sicher. Also ist  $X^{T_n}$  konstant für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Der Satz ist damit bewiesen.

Wir wollen also ein Integral für Integratoren mit Pfaden von unbeschränkter Variation konstruieren. Dass man die pfadweise Integration à la Stieltjes nicht einfach nur etwas abändern muss, wird durch folgenden Satz deutlich: ■

**Satz 4.5** Seien  $H : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  rechts-stetig und  $(\Delta^n)$  eine Folge von Zerlegungen  $\Delta^n = \{t_j \in [0, 1]; t_0 = 0, t_n = 1, t_i \leq t_{i+1} \forall i\}$  des Intervalls  $[0, 1]$  mit  $\max_{t_{j+1}, t_j \in \Delta^n} |t_{j+1} - t_j| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Das Integral  $I_n$  sei durch

$$I_n : C([0, 1], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad I_n(X) = \sum_{j=0}^{n-1} X(t_j)(H(t_{j+1}) - H(t_j))$$

definiert. Die Zahlenfolge  $(I_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiere für jedes  $X \in C([0, 1])$ . Dann ist  $H$  bereits von beschränkter Variation.

**Beweis:** Zu  $n \in \mathbb{N}$  existiert eine stetige Funktion  $X$  mit  $X(t_k) = \text{sign} \{H(t_{k+1}) - H(t_k)\}$  und  $\|X\|_\infty = 1$ . Für dieses  $X$  gilt

$$\begin{aligned} I_n(X) &= \sum_{j=0}^{n-1} |H(t_{j+1}) - H(t_j)| \\ \Rightarrow \quad \|I_n\|_{C([0,1]) \rightarrow \mathbb{R}} &\geq \sum_{j=0}^{n-1} |H(t_{j+1}) - H(t_j)| \\ \Rightarrow \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \|I_n\|_{C([0,1]) \rightarrow \mathbb{R}} &\geq V(H), \end{aligned}$$

wobei  $V(H)$  die totale Variation von  $H$  bezeichnet. Nach Voraussetzung ist die Menge  $\{|I_n(X)|, n \in \mathbb{N}\}$  beschränkt für jedes  $X \in C([0, 1])$ . Nach dem Satz von Banach<sup>28</sup>-Steinhaus<sup>29</sup> ist dann aber auch  $\{\|I_n\|_{C([0,1]) \rightarrow \mathbb{R}}; n \in \mathbb{N}\}$  beschränkt und somit nach obiger Abschätzung ebenfalls  $V(H)$ , was zu zeigen war. ■

Im folgenden Kapitel zeigen wir nun, wie das nach Itô benannte Integral  $(X \cdot B)$  tatsächlich definiert werden kann.

## 4.A Weitere Resultate

---

<sup>28</sup>Stefan Banach, 1892 (Kraków, Österreich-Ungarn, heute Polen) - 1945 Lvov (heute Ukraine), Begründer der modernen Funktionalanalysis, arbeitet vorwiegend in Kaffeehäusern.

<sup>29</sup>Hugo Dyonizy Steinhaus, 1887 (Jasło, Österreich-Ungarn, heute Polen) - 1972 (Wrocław, Polen). Mitglied im berühmten Fan-Club des Schottischen Kaffeehauses in Lvov zusammen mit Banach, Ulam, Mazur, Kac, Schauder, Kaczmarz und anderen. Entwickelte 1925 noch vor von Neumann das Konzept von Strategien in der Spieltheorie.