3.2 Martingale

Mit Hilfe des Konzepts der bedingten Erwartung können wir erklären, was Martingale sind. Kurz gesagt sind Martingale stochastische Prozesse, die im Mittel konstant bleiben. Wir benötigen noch den Begriff einer Filtration.

Definition 3.6 *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine diskrete Familie $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von σ-Algebren $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$ heißt „Filtration“, wenn $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}\, \forall n$ gilt. Eine kontinuierliche Familie $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ von σ-Algebren $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ heißt „Filtration“ , wenn $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t\, \forall s < t$ gilt. Man sagt, dass $(\mathcal{F}_t)$ den sogenannten „üblichen Bedingungen“ genügt, wenn die beiden folgenden Bedingungen gelten:*

- $\mathcal{F}_{s+} := \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{s+\varepsilon} = \mathcal{F}_s$ *(Stetigkeit von rechts)* ,
- $A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(A) = 0 \quad \Rightarrow A \in \mathcal{F}_s\, \forall s$.

In diesem Skript behandeln wir nur Filtrationen des obigen Typs.

Definition 3.7 *Der Prozess $M = \{M_n; n \in \mathbb{N}\}$ heißt „adaptiert an $(\mathcal{F}_n)$“, wenn M_n $\mathcal{F}_n$-messbar für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Der Prozess $M = \{M_t; t \geq 0\}$ heißt „adaptiert an $(\mathcal{F}_t)$“, wenn M_t F_t-messbar ist für alle $t \geq 0$.*

Definition 3.8 *Der Prozess $M = \{M_n; n \in \mathbb{N}\}$ heißt „$(\mathcal{F}_n)$-Martingal“, wenn M an $(\mathcal{F}_n)$ adaptiert ist und zusätzlich $M_n \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})\, \forall n$ und*

$$M_n = \mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.} \qquad \forall n \quad \text{gilt}. \tag{3.3}$$

M heißt „$(\mathcal{F}_n)$-Sub-Martingal“, wenn anstelle von (3.3) die Ungleichung $M_n \leq \mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n)$ und „$(\mathcal{F}_n)$-Super-Martingal“, wenn stattdessen $M_n \geq \mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n)$ gilt.

Definition 3.9 *Der Prozess $M = \{M_t; t \geq 0\}$ heißt „$(\mathcal{F}_t)$-Martingal“, wenn M an $(\mathcal{F}_t)$ adaptiert ist und zusätzlich $M_t \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})\, \forall t \geq 0$ und*

$$M_s = \mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}) \qquad \mathbb{P} - f.s. \qquad \forall s \leq t \quad \text{gilt}. \tag{3.4}$$

M heißt „$(\mathcal{F}_t)$-Sub-Martingale“, wenn anstelle von (3.4) die Ungleichung $M_s \leq \mathbb{E}\big(M_t|\mathcal{F}_s\big)$ und „$(\mathcal{F}_t)$-Super-Martingal“, wenn stattdessen $M_s \geq \mathbb{E}\big(M_t|\mathcal{F}_s\big)$ gilt.

Beispiele:

(1) Seien B eine Brownsche Bewegung und $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s; s \leq t)$. Dann ist B ein $(\mathcal{F}_t)$-Martingal, denn $\mathbb{E}(B_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(B_t - B_s|\mathcal{F}_s) + B_s = \mathbb{E}(B_t - B_s) + B_s = B_s$.

(2) Unter den Voraussetzungen wie in (1) ist der durch $M_t = (B_t)^2 - t$ definierte Prozess ein $(\mathcal{F}_t)$-Martingal, denn

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big((B_t)^2|\mathcal{F}_s\big) &= \mathbb{E}\big((B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s\big) + 2B_s\mathbb{E}(B_t|\mathcal{F}_s) - B_s^2 \\ &= \mathbb{E}(B_t - B_s)^2 + 2(B_s)^2 - (B_s)^2 \\ &= (t-s) + (B_s)^2\,,\end{aligned}$$

was gleichbedeutend mit $\mathbb{E}((B_t)^2 - t|\mathcal{F}_s) = (B_s)^2 - s$ ist.

(3) Unter den Voraussetzungen wie in (1) ist der durch $X_t = \exp(\mu B_t - \frac{\mu^2 t}{2})$, $\mu \in \mathbb{C}$, definierte Prozess ein $(\mathcal{F}_t)$-Martingal.

(4) Seien $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $(\mathcal{F}_t)$ eine Filtration. Dann ist der durch $M_t = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_t)$ definierte Prozess ein $(\mathcal{F}_t)$-Martingal.

(5) Sei $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariabler. Seien $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ und $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, d. h. $\mathcal{F}_n$ ist die kleinste (gröbste) σ-Algebra, so dass $X_1, \ldots, X_n$ alle $\mathcal{F}_n$-messbar sind. Es folgt, dass X_{n+1} unabhängig von $\mathcal{F}_n$ ist. $S = (S_n)_n$ ist ein $\mathcal{F}_n$-Martingal, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{E}(X_n) = 0$ und ein $(\mathcal{F}_n)$-Supermartingal, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{E}(X_n) \leq 0$ gilt.

Satz 3.10 *Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex, Ω offen und X ein $(\mathcal{F}_t)$-Martingal mit $f \circ X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dann ist $\{f(X_t)\}_{t\in I}$ ein $(\mathcal{F}_t)$-Sub-Martingal. Die Aussage bleibt richtig, wenn X nur ein Sub-Martingal ist, aber f zusätzlich nicht-fallend ist.*

Beweis: Beide Behauptungen folgen aus der Jensenschen Ungleichung Satz 3.4-(4) für bedingte Erwartungen. ■

Beispiel: Wenn X ein Martingal ist, so ist $|X|$ ein Sub-Martingal.

Wenn Martingale im Mittel konstant bleiben und Sub-Martingale im Mittel wachsen, so müsste die Differenz zwischen einem Sub-Martingal und einem Martingal ein wachsender Prozess sein. Der folgende Satz sagt nun, dass genau dies tatsächlich der

Fall ist. Insbesondere hat der Differenzprozess verbesserte Messbarkeitseigenschaften, was später sehr wichtig sein wird[21].

Satz 3.11 *(Doob[22]-Zerlegung für Zeit-diskrete Prozesse) Seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X ein $(\mathcal{F}_n)$-Sub-Martingal. Dann existieren ein $(\mathcal{F}_n)$-Martingal M und ein Prozess A, $A_1 = 0\,\mathbb{P}$-f.s., mit*

- *A_n ist $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar,*
- *$A_n(\omega) \leq A_{n+1}(\omega)\ \forall n$, für $\mathbb{P}$- fast alle ω,[23]*
- *$X_n(\omega) = M_n(\omega) + A_n(\omega)\ \forall n$, für $\mathbb{P}$- fast alle ω.*

Diese Eigenschaften bestimmen M und A eindeutig bis auf $\mathbb{P}$-Nullmengen.

Beweis: Wir definieren drei Prozesse $D, \widetilde{D}, Y$ durch

$$\begin{aligned}
&D_1 = X_1\,,\ D_n = X_n - X_{n-1} \text{ für } n \geq 2\,,\\
&\widetilde{D}_1 = 0\,,\ \widetilde{D}_n = \mathbb{E}(D_n|\mathcal{F}_{n-1}) \text{ für } n \geq 2\,,\\
&Y_n = D_n - \widetilde{D}_n\,.
\end{aligned}$$

M und A sind schließlich über

$$A_n = \sum_{j=1}^n \widetilde{D}_j \quad \text{und} \quad M_n = X_n - A_n = \sum_{j=1}^n Y_j$$

definiert. Da X ein Sub-Martingal ist, sind $\widetilde{D}_n$ nicht-negativ $\mathbb{P}$-fast sicher für alle n. Also ist A nicht-fallend. Nach Konstruktion ist A_n sowieso $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar. Wegen

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}\big(\sum_{n=1}^n Y_j|\mathcal{F}_n\big) + \mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \sum_{j=1}^n Y_j + \mathbb{E}(D_{n+1} - \widetilde{D}_{n+1}|\mathcal{F}_n)\\
&= M_n + \mathbb{E}(D_{n+1}|\mathcal{F}_n) - \widetilde{D}_{n+1} = M_n
\end{aligned}$$

[21] In der stochastischen Optimierung bzw. der Finanzmathematik müssen zulässige Strategien vorhersagbar sein, d.h. sie dürfen nicht von später eintretenden Ereignissen abhängen.

[22] Joseph Leo Doob, 1910 (Cincinnati) - 2004 (Urbana/Illinois). Vater der Matingaltheorie, arbitete vor allem in der Potentialtheorie.

[23] Man nennt einen solchen Prozess A daher „wachsend“.

folgt, dass M ein Martingal ist. Seien nun $\widetilde{M}$ und $\widetilde{A}$ zwei weitere Prozesse mit denselben Eigenschaften und

$$\widetilde{M}_k = M_k\,;\ \widetilde{A}_k = A_k \ \mathbb{P}\text{-f.s. für } k \leq n-1\,.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\widetilde{A}_n &= \mathbb{E}(\widetilde{A}_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(X_n - \widetilde{M}_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) - \widetilde{M}_{n-1}\\ &= \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) - M_{n-1} = \mathbb{E}(X_n - M_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(A_n|\mathcal{F}_{n-1}) = A_n\,.\end{aligned}$$

Also folgt die behauptete Eindeutigkeit wegen $A_1 = \widetilde{A}_1 = X_1$ und nach Induktion.

■

Achtung: Wenn $\{X_n\}$ ein wachsender, an $(\mathcal{F}_n)$ adaptierter Prozess ist, so ist X ein Sub-Martingal. Dennoch ist die Doob-Zerlegung eventuell nicht in der Form $M \equiv 0, A \equiv X$ gegeben, denn im Allgemeinen ist X_n ja nicht $\mathcal{F}_{n-1}$-messsbar.

Die Bedingung, dass A_n $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar ist, bedeutet, dass A_n nur Mengen $B \in \mathcal{F}_{n-1}$ unterscheiden kann, nicht aber feinere Objekte. In diesem Sinn ist A vorhersagbar. Wir kommen später auf diesen Begriff zurück.

Wir benötigen nun das Konzept der Stoppzeiten, um die Stärke von Martingalen demonstrieren zu können.

Definition 3.12 *Eine Zufallsvariable $T : \Omega \to [0,\infty]$ heißt Stoppzeit (oder Optionszeit bzw. Markov-Zeit) bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t)$, wenn $(T < t) \in \mathcal{F}_t\ \forall t \geq 0$. Eine Zufallsvariable $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ heißt Stoppzeit, wenn $(T \leq n) \in \mathcal{F}_n\ \forall n$.*

T ist eine $(\mathcal{F}_n)$-Stoppzeit genau dann, wenn $(T = n) \in \mathcal{F}_n\ \forall n$. Dies gilt wegen $(T = n) = (T \leq n)\backslash(T \leq n-1)$ und $(T \leq n) = \bigcup_{j=1}^{n}(T = j)$. Für $(\mathcal{F}_t)$-Stoppzeiten gelten die folgenden einprägsamen Zusammenhänge, die mit ähnlichen Tricks bewiesen werden.

Lemma 3.13 *(a) T ist eine $(\mathcal{F}_t)$-Stoppzeit genau dann, wenn $(T \leq t) \in \mathcal{F}_t\ \forall t$.*

(b) Sei $t \geq 0$. Dann ist $\omega \to T(\omega) = t$ eine Stoppzeit.

(c) Wenn S und T Stoppzeiten sind, so sind ebenfalls $\max\{S,T\}$ *und* $\min\{S,T\}$ *Stoppzeiten.*

(d) Wenn (T_n) eine Folge von nicht-fallenden Stoppzeiten ist, so ist $\sup_n T_n$ ebenfalls eine Stoppzeit.

(e) Wenn (T_n) eine Folge nicht-wachsender Stoppzeiten ist, so ist $\inf_n T_n$ ebenfalls Stoppzeit.

(f) Sei X ein stochastischer Prozess mit stetigen Pfaden und Werten in $\mathbb{R}^d$. Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ offen oder abgeschlossen. Dann sind

$$\begin{aligned} T_A &= \inf\{t > 0\,;\; X_t \in A\} && \textit{(Eintrittszeit)}\,, \\ \tau_A &= \inf\{t > 0\,;\; X_t \notin A\} = T_{A^c} && \textit{(Austrittszeit)} \end{aligned}$$

beide Stoppzeiten.

Beweis: Wir beschränken uns auf zwei charakteristische Beweise und beginnen mit Aussage (a). Wegen

$$(T \le t) = \bigcap_{n>N} (T < t + \tfrac{1}{n}) \in \bigcap_{n>N} \mathcal{F}_{t+\frac{1}{n}} \ \forall N$$

folgt $(T \le t) \in \mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$[24]. Andererseits impliziert $(T \le t) \in \mathcal{F}_t \ \forall t$ wegen $(T < t) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (T \le t - \frac{1}{n})$ auch $(T < t) \in \mathcal{F}_t$, da $(\mathcal{F}_t)$ eine Filtration ist.
Betrachten wir nun die Situation in (f), wobei $A \subset \mathbb{R}^d$ offen sein. Dann ist T_A tatsächlich eine Stoppzeit, denn es gilt

$$(T < t) = \bigcup_{\substack{s\in\mathbb{Q} \\ s<t}} (X_s \in A) \in \mathcal{F}_t\,.$$

Die anderen Beweise sind ähnlicher Natur, und wir überlassen sie dem Leser. ■

Zu einer $(\mathcal{F}_t)$-Stoppzeit T kann man die σ-Algebra $\mathcal{F}_T$ aller Ereignisse definieren, die von T unterschieden werden können. Anders gesagt besteht $\mathcal{F}_T$ aus allen Ereignissen, von denen man zum vom Pfad abhängigen Zeitpunkt T sagen kann, ob ihr „Wecker“ geklingelt hat oder nicht geklingelt hat:

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n\Big)\,, \qquad \mathcal{F}_T = \big\{A \in \mathcal{F}_\infty\,;\; A \cap (T \le t) \in \mathcal{F}_t \ \forall t \in \mathbb{R}_+\big\}\,.$$

[24] Wir hatten vereinbart, dass alle betrachteten σ-Algebren die sogenannten üblichen Bedingungen erfüllen

Man überlegt sich leicht, dass $\mathcal{F}_T$ tatsächlich eine σ-Algebra ist.

Seien T eine beschränkte Stoppzeit und X eine stochastischer Prozess. Dann bezeichnet man mit X_T die Zufallsvariable $\omega \to X_T(\omega)$.

Wenn $X = \{X_n\}$ ein Martingal ist, so wissen wir bereits $\mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_n)\,\forall n$. Tatsächlich gilt noch eine viel feinere Aussage, nämlich $\mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_T)$ für jede beschränkte Stoppzeit T. Wenn X_n den Wert einer Aktie zum Zeitpunkt n bezeichnet, so bedeutet dies, dass jede noch so clevere Verkaufsregel (Stoppzeit) keinen höheren Verkaufswert als den bereits zum Zeitpunkt Null bekannten Wert $\mathbb{E}(X_0)$ erzielen kann.

Satz 3.14 *[Doob]*
(a) Seien X ein $(\mathcal{F}_n)$-Martingal und T eine beschränkte $(\mathcal{F}_n)$-Stoppzeit, d.h. $\exists\, T_0 \in \mathbb{N} : T \leq T_0$ $\mathbb{P}$-fast sicher. Dann gelten $X_T \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und

$$\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)\,.$$

(b) Wenn X ein $(\mathcal{F}_n)$-Submartingal und T eine durch $T_0 \in \mathbb{N}$ beschränkte $(\mathcal{F}_n)$-Stoppzeit ist, so gilt

$$\mathbb{E}(X_T) \leq \mathbb{E}(X_{T_0})\,.$$

Beweis: Sei $T_0 = \max\limits_{\omega\in\Omega} \big\{T(\omega)\big\}$. Da einerseits

$$\mathbb{E}(X_T) = \sum_{k=0}^{T_0} \mathbb{E}\big(X_T \mathbb{1}_{\{T=k\}}\big) = \sum_{k=0}^{T_0} \mathbb{E}\big(X_k \mathbb{1}_{\{T=k\}}\big)$$

und andererseits

$$\mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_{T_0}) = \sum_{k=0}^{T_0} \mathbb{E}\big(X_{T_0} \mathbb{1}_{\{T=k\}}\big)\,,$$

ist es ausreichend, $\mathbb{E}\big(X_k \mathbb{1}_{\{T=k\}}\big) = \mathbb{E}\big(X_{T_0} \mathbb{1}_{\{T=k\}}\big)\,\forall k$ zu beweisen. Da T eine Stoppzeit und X ein Martingal ist, gilt

$$\mathbb{E}\big(X_{T_0} \mathbb{1}_{\{T=k\}} | \mathcal{F}_k\big) = \mathbb{1}_{\{T=k\}} \mathbb{E}(X_{T_0} | \mathcal{F}_k) = \mathbb{1}_{\{T=k\}} X_k\,.$$

Die gewünschte Aussage folgt nun nach Bilden des Erwartungswertes links und rechts. Die zweite Aussage beweist man analog. ∎

Beispiel: Sei $\Omega = \{\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{21}, \omega_{22}\}$ mit $\mathbb{P}\{\omega\} = \frac{1}{4} \forall \omega \in \Omega$. Seien $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \big\{\emptyset, \Omega, \{\omega_{11}, \omega_{12}\}, \{\omega_{21}, \omega_{22}\}\big\}$ und $\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(\Omega)$. Sei X definiert durch

$$\begin{aligned} X(\omega) =& 0 \quad \forall \omega \,, \\ X(\omega) =& \left\{ \begin{array}{ll} 1 & , \omega \in \{\omega_{11}, \omega_{12}\} \\ -1 & , \omega \in \{\omega_{21}, \omega_{22}\} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

und $X(\omega_{12}) = 2$, $X(\omega_{11}) = 0$, $X(\omega_{21}) = 1$ und $X(\omega_{22}) = -3$. an mache sich zunächst klar, dass X tatsächlich ein Martingal ist. Sei nun eine Stoppzeit T definiert durch $T(\omega) = \min\{n \wedge 2\,;\ X_n \geq 1\}$. Also gilt $X_T(\omega) = 1 \forall \omega \in \{\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{21}\}$ und $X_T(\omega_{22}) = -3$ und somit wie bereits erwartet $\mathbb{E}X_T = \mathbb{E}X_0 = 0$.

Das Pendant zu obigem Satz für zeit-kontinuierliche Prozesse liest sich wie folgt:

Satz 3.15 *Seien X ein $(\mathcal{F}_t)$-Martingal mit rechts-stetigen Pfaden und T eine $(\mathcal{F}_t)$-Stoppzeit mit $T \leq T_0 \in \mathbb{N}$ $\mathbb{P}$-fast sicher. Dann gilt*

$$\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)\,.$$

Ist X ein $(\mathcal{F}_t)$-Sub-Martingal mit rechts-stetigen Pfaden, so gilt stattdessen

$$\mathbb{E}(X_T) \leq \mathbb{E}(X_{T_0})\,.$$

Der Beweis des Satzes beruht darauf, X durch Prozesse X^n zu approximieren, die zeit-diskret sind.

In späteren Versionen zu ergänzen: Beweis des Satzes durch Diskretisieren und mit Hilfe von äquivalenten Bedingungen für gleichgradige Integrierbarkeit.

Korollar 3.16 *Wenn X ein $(\mathcal{F}_t)$-Martingal mit rechts-stetigen Pfaden und S, T zwei $(\mathcal{F}_t)$-Stoppzeiten mit $S(\omega) \leq T(\omega) \leq T_0 \in \mathbb{N}$ für $\mathbb{P}$-fast alle $\omega \in \Omega$ sind, so gelten*

$$X_S = \mathbb{E}(X_T | \mathcal{F}_S) \quad \mathbb{P}\text{-}f.s. \qquad und \tag{3.5}$$

$$\mathbb{E}\big((M_T - M_S)^2\big) = \mathbb{E}\big((M_T)^2\big) - \mathbb{E}\big((M_S)^2\big)\,. \tag{3.6}$$

Beweis: Sei $M \in \mathcal{F}_S$. Wir müssen $\mathbb{E}(X_S \mathbb{1}_M) = \mathbb{E}(X_T \mathbb{1}_M)$ zeigen. Dazu sei U eine neue Stoppzeit, die durch

$$U(\omega) = \begin{cases} S(\omega) & \text{für } \omega \in M\,, \\ T(\omega) & \text{für } \omega \notin M\,. \end{cases}$$

definiert ist. Da U eine Stoppzeit ist, gilt

$$\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_{T_0}) = \mathbb{E}(X_U) = \mathbb{E}(X_S \mathbb{1}_M) + \mathbb{E}(X_T \mathbb{1}_{M^c}),$$

woraus die gewünschte Behauptung nach Subtrahieren des letzten Terms folgt. Die zweite Aussage folgt aus

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big((X_T - X_S)^2 | \mathcal{F}_S\big) &= \mathbb{E}\big((X_T)^2 | \mathcal{F}_S\big) - 2X_S \mathbb{E}(X_T | \mathcal{F}_S) + (X_S)^2 \\ &= \mathbb{E}\big((X_T)^2 - (X_S)^2 | \mathcal{F}_S\big)\end{aligned}$$

und Bildung der Erwartungswerte auf beiden Seiten. ■

Das nächste zu beweisende Resultat, die sogenannte Doobsche Ungleichung (manchmal auch Maximal-Ungleichung genannt) erlaubt es, für einen stochastischen Prozess X Wahrscheinlichkeiten der Form $\mathbb{P}\big(\sup_{s \le t} |X_s| \ge \lambda\big)$ für $\lambda > 0$ nach oben abzuschätzen. Im Anschluss werden wir zwei hilfreiche und anschauliche Anwendungen geben, siehe Lemma 3.20 und Lemma 3.21.

Für einen zeit-kontinuierlichen Prozess X bzw. für einen zeit-diskreten Prozess X definieren wir für $t > 0$ bzw. $n \in \mathbb{N}$

$$X_t^* = \sup_{s \le t} |X_s| \quad \text{bzw.} \quad X_n^* = \max_{k \le n} |X_k|$$

und $X_\infty^* = X^*$, sofern dieses Objekt wohl-definiert ist.

Satz 3.17 *[Doobsche Ungleichung]*
(a) Sei X ein $(\mathcal{F}_n)$-Martingal. Dann gilt für alle n

$$\mathbb{P}(X_n^* \ge \lambda) \le \frac{\mathbb{E}(|X_n|)}{\lambda} \quad \forall \lambda > 0\,.$$

(b) Sei X ein positives $(\mathcal{F}_t)$-Sub-Martingal mit rechts-stetigen Pfaden oder ein $(\mathcal{F}_t)$-Martingal mit rechts-stetigen Pfaden. Dann gilt für alle t

$$\mathbb{P}(X_t^* \ge \lambda) \le \frac{\mathbb{E}(|X_t|)}{\lambda} \quad \forall \lambda > 0\,.$$

Beweis: Wir beweisen Aussage (a). Sei $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ definiert durch $T(\omega) = \min\{j; |T_j(\omega)| \ge \lambda\}$. Wir erinnern daran, dass aufgrund der Konvexität der Abbildung $t \to |t|$ der Prozess $|X|$ ein Sub-Martingal ist. Somit gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n^* \ge \lambda) = \mathbb{P}(T \le n) = \mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{\{T \le n\}}\big) \le \mathbb{E}\Big(\tfrac{|X_T|}{\lambda} \mathbb{1}_{\{T \le n\}}\Big) \le \lambda^{-1} \mathbb{E}\Big(|X_{T \wedge n}|\Big) \\ \le \lambda^{-1} \mathbb{E}(|X_n|)\end{aligned}$$

nach Satz 3.15. Der Beweis der zweiten Aussage ist nicht besonders schwierig und beruht auf einer Approximation von X durch zeit-diskrete Prozesse X^n. ∎

Wenn man X_n^* als Bild $M(X_n)$ von X_n unter einem Operator M ansieht, so besagt das Resultat

$$\mathbb{P}\big(M(X_n^*) \geq \lambda\big) \leq \lambda^{-1}\mathbb{E}(|X_n|) = \lambda^{-1} \int\limits_{\Omega} |X_n| d\mathbb{P}\,,$$

dass der Operator M vom schwachen Typ $(1,1)$ ist. Da aber für alle $k \leq n$ auch

$$|X_k| \leq \mathbb{E}\big(|X_n|\big|\mathcal{F}_k\big) \leq \|X_n\|_\infty \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}\,,$$

folgt auch, dass M vom starken Typ (∞,∞) ist. Der Interpolationssatz von Marcinkiewicz[25] kann nun angewendet werden und führt zu folgendem Resultat:

Satz 3.18 *(a) Seien X ein $(\mathcal{F}_n)$-Martingal und $p > 1$. Dann existiert eine positive Konstante $c(p)$, und es gilt*

$$\mathbb{E}\big((X_n^*)^p\big) \leq c(p)\mathbb{E}\big(|X_n|\big)^p\,.$$

(b) Seien X ein positives $(\mathcal{F}_t)$-Sub-Martingal oder ein $(\mathcal{F}_t)$-Martingal mit rechtsstetigen Pfaden. Dann existiert zu $p > 1$ eine Konstante $c(p) > 0$ mit

$$\mathbb{E}\big((X_t^*)^p\big) \leq c(p)\mathbb{E}\big(|X_t|^p\big)\,.$$

Wir wollen kurz auf die oben verwendeten Begriffe eingehen. Seien $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ und $p \geq 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathcal{O}} |f(x)|^p\, dx &= \int\limits_{\mathcal{O}} \Big(\int\limits_0^{|f(x)|^p} \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(s)\, ds\Big)\, dx = \int\limits_{\mathcal{O}} \Big(\int\limits_0^{\infty} \mathbb{1}_{\{|f(x)|^p \geq s\}}(s)\, ds\Big) \\ &= p \int\limits_{\mathcal{O}} \Big(\int\limits_0^{\infty} t^{p-1}\mathbb{1}_{\{|f(x)| \geq t\}}(t)\, dt\Big)\, dx = p\int\limits_0^{\infty} t^{p-1}\lambda^d\big(\{x \in \mathcal{O}\,;\; |f(x)| \geq t\}\big)\, dt\,,\end{aligned}$$

wobei λ^d das d-dimensionale Lebesgue-Maß bedeutet. Die linke Seite der obigen Gleichung ist endlich, falls $f \in L^p(\mathcal{O})$. Die rechte Seite ist endlich, falls die Funktion $t \to \lambda^d\big(\{x \in \mathcal{O}\,;\; |f(x)| \geq t\}\big)$ für große t „schneller“ als t^{-p} gegen Null geht.

[25] Józef Marcinkiewicz, 1910 (Cimoszka nahe Białystok, Polen) - 1940 (Katyń, Ukraine), zusammen mit Tausenden anderen Gefangenen vom Sowjetischen NKWD ermordert.

Wenn sie „genauso schnell“ wie t^{-p} gegen Null geht, so sagt man, dass f zu einem „schwachen“ $L^p(\mathcal{O})$- Raum gehört. Diese Erklärungen sollten nun folgende Definition einleuchtend erscheinen lassen.

Seien $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ zwei σ-endliche Maßräume und M, der messbare Funktionen $\Omega_1 \to \mathbb{R}$ auf messbare Funktionen $\Omega_2 \to \mathbb{R}$ abbildet. M ist also nicht notwendigerweise linear. Seien $p, q \in [1, \infty), q < \infty$. Man sagt, dass M vom „schwachen Typ (p, q)“ ist, falls mit einer Konstanten $A > 0$ gilt:

$$\mu_2\big(\{x \in \Omega_2; |(Mf)(x)| > t\}\big) \leq \Big(t^{-1} A \|f\|_{L^p(\Omega_1)}\Big)^q \quad \forall\, t > 0\,.$$

Für $p, q \in [1, \infty)$ sagt man, dass M vom „starken Typ (p, q)“ ist, falls mit einer Konstanten $A > 0$ gilt:

$$\|Mf\|_{L^q(\Omega_2)} \leq A \|f\|_{L^p(\Omega_1)}\,.$$

Für $p \in [1, \infty), q = \infty$ ist M vom schwachen Typ (p, ∞), wenn M vom starken Typ (p, ∞) ist. Beim Beweis von Satz 3.18 haben wir nun folgenden Interpolationssatz verwendet.

Satz 3.19 (Marcinkiewicz) *Seien Ω_1, Ω_2 und M wie eben. Sei M zusätzlich sublinear. Seien $p_0, p_1 \in [1, \infty]$ und $p \in (p_0, p_1)$. M sei weiterhin sowohl vom schwachen Typ (p_0, p_0) also auch vom schwachen Typ (p_1, p_1). Dann ist M auch vom* **starken** *Typ (p, p), und es gilt*

$$\|Tf\|_{L^p(\Omega_2)} \leq 2\Big(\frac{pA_0^{p_0}}{p - p_0} + \frac{p_1 A_1^{p_1}}{p_1 - p}\Big)^{1/p} \|f\|_{L^p(\Omega_1)} \qquad p_1 < \infty\,, \tag{3.7}$$

$$\|Tf\|_{L^p(\Omega_2)} \leq (1 + A_1)\Big(\frac{pA_0^{p_0}}{p - p_0}\Big)^{1/p} \|f\|_{L^p(\Omega_1)} \qquad p_1 = \infty\,. \tag{3.8}$$

Das Resultat gilt auch in feineren Varianten, siehe das Buch von Bennett/Sharpley mit Titel „Interpolation of operators “ oder das Buch „Interpolation spaces “ von Bergh/Löfström.

Lemma 3.20 *Sei B eine standardisierte Brownsche Bewegung. Dann gilt*

$$\mathbb{P}\big(\sup_{s \leq t} |B_s| \geq \lambda\big) \leq 2e^{-\frac{\lambda^2}{2t}} \qquad \forall\, \lambda > 0, t > 0\,.$$

Beweis: Zunächst gilt

$$\mathbb{P}\big(\sup_{s\leq t}|B_s|\geq\lambda\big)=2\mathbb{P}\big(\sup_{s\leq t}B_s\geq\lambda\big)\,.$$

Sei $\alpha>0$ eine Zahl, deren Wert wir später festlegen. Da die Exponentialfunktion konvex ist, ist e^B ein positives Sub-Martingal. Somit gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(\sup_{s\leq t}B_s\geq\lambda\big)&\leq\mathbb{P}\big(\sup_{s\leq t}e^{\alpha B_s}\geq e^{\alpha\lambda}\big)\leq e^{-\alpha\lambda}\mathbb{E}\big(e^{\alpha B_t}\big)=e^{-\alpha\lambda}\mathbb{E}\Big(e^{\alpha B_t-\frac{\alpha^2}{2t}}\Big)e^{\frac{\alpha^2}{2t}}\\&\leq e^{-\alpha\lambda}e^{\frac{\alpha^2}{2t}}=e^{-\frac{\lambda^2}{2t}}\,,\end{aligned}$$

wobei wir $\alpha=\frac{\lambda}{t}$ wählen und benutzen, dass die geometrische Brownsche Bewegung ein Martingal ist, siehe Abschnitt 3.1, Beispiel (3). ■

Lemma 3.21 *Seien $x\in(a,b)$ und B eine Brownsche Bewegung mit Start in x, das heißt $\mathbb{P}^x(B_0=x)=1$. Dann ist $\tau_{[a,b]}<\infty$ $\mathbb{P}$-f.s., und es gilt*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^x\big(B_{\tau_{[a,b]}}=a\big)&=\frac{b-x}{b-a}\,,\\\mathbb{P}^x\big(B_{\tau_{[a,b]}}=b\big)&=\frac{x-a}{b-a}\,.\end{aligned}$$

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass $\tau_{[a,b]}$ $\mathbb{P}$-fast sicher endlich ist. Wir schreiben kürzer $\tau=\tau_{[a,b]}$. Da $\big\{(B_t)^2-t\big\}_t$ ein Martingal ist, gilt

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^x\big((B_{t\wedge\tau})^2-(t\wedge\tau)\big)=\mathbb{E}^x(B_0^2-0)=x^2\\\Rightarrow\qquad&x^2+\mathbb{E}(t\wedge\tau)\leq\mathbb{E}^x\big((B_{t\wedge\tau})^2\big)\leq|a|^2+|b|^2\,.\end{aligned}$$

Da also $\mathbb{E}(t\wedge\tau)$ endlich ist, folgt nach einer Anwendung vom Lemma von Fatou, dass auch $\mathbb{E}(\tau)$ endlich ist. Also ist auch τ $\mathbb{P}$-fast sicher endlich. Da B ein Martingal ist, gilt $\mathbb{E}^x(B_{\tau\wedge t})=x$ und nach Wahl einer aufsteigenden Folge (t_k), $t_k\nearrow\infty$, auch $\mathbb{E}^x(B_\tau)=x$. Wenn wir die beiden Fälle „Austritt über a“ und „Austritt über b“ voneinander unterscheiden, erhalten wir somit

$$\begin{aligned}&x=\mathbb{E}^x(B_\tau)=a\mathbb{P}^x(B_\tau=a)+b\mathbb{P}^x(B_\tau=b)\,,\\\text{und}\qquad&\mathbb{P}^x(B_\tau=a)+\mathbb{P}^x(B_\tau=b)=1\,,\end{aligned}$$

woraus die zweite Behauptung folgt. Das Lemma ist bewiesen. ■

3.A Weitere Resultate

Eine Familie $\{X_t\,;\ t \in I\}$ von Zufallsvariablen heißt gleichgradig integrierbar, wenn

$$\lim_{K\to\infty} \sup_{t\in I} \mathbb{E}\big(|X_t| \mathbb{1}_{\{|X_t|>K\}}\big) = 0$$

gilt.

Sei $X \in L^1(\Omega)$. Dann ist die durch $X_t = X\ \forall t$ gegebene triviale Familie $\{X_t\}$ gleichgradig integrierbar. Die Familie $\{n\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist dagegen nicht gleichgradig integrierbar.

Die beiden folgenden Sätze gehören zum Standardarsenal von Analytikern und Stochastikern.

Satz 3.22 *Die Familie $\{X_t\,;\ t \in I\}$ ist gleichgradig integrierbar genau dann, wenn die beiden folgenden Aussagen gelten:*

$$\begin{array}{ll} (1) & \sup_{t\in I} \mathbb{E}(X_t) < \infty\,, \\ (2) & \forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ :\ \Big(\mathbb{P}(A) < \delta \Rightarrow \mathbb{E}(|X_t|\mathbb{1}_A) < \varepsilon\ \forall t \in I\Big)\,. \end{array}$$

Satz 3.23 *Seien $X, X_n \in L^1(\Omega)\ \forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\mathbb{E}(|X_n - X|) \to 0$$

genau dann, wenn

(1) $X_n \to X$ *im Maß* [26],

(2) $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ist gleichgradig integrierbar* .

Im Gegensatz zum Beweis von Satz 3.11 ist der Beweis für zeit-kontinuierliche Prozesse aufwendig. Wir geben daher hier nur den entsprechenden Satz an und verzichten auf den Beweis.

Satz 3.24 *(Doob-Zerlegung für Zeit-kontinuierliche Prozesse) Seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X ein $(\mathcal{F}_t)$-Sub-Martingal mit stetigen Pfaden. Dann*

[26] $X_n \to X$ im Maß bedeutet $\mathbb{P}\big(|X_n - X| \geq \delta\big) \to 0$ für $n \to \infty$ und das für alle $\delta > 0$.

existieren ein $(\mathcal{F}_t)$-Martingal M und ein wachsender Prozess A mit $A_1 = 0\,\mathbb{P}$-f.s. und $X_t(\omega) = M_t(\omega) + A_t(\omega)\ \forall t$, für $\mathbb{P}$- fast alle ω. Diese Eigenschaften bestimmen M und A eindeutig bis auf $\mathbb{P}$-Nullmengen.

Wir geben noch einen wichtigen Satz an, auf dessen Beweis und Verwendung wir hier aber verzichten.

Satz 3.25 *[Doob] Sei M ein Martingal auf einer unbeschränkten Indexmenge I. Dann sind äquivalent:*

(1) M ist gleichgradig integrabel, (d. h. die Familie $\{M_t\}_{t\in I}$ ist gleichgradig integrabel).

(2) M ist L^1-konvergent im Punkt $\sup I = \infty$, d.h.
$\exists M_\infty \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}):\ \mathbb{E}\big(|M_\infty - M_t|\big) \to 0$ *für* $t \to \infty$.

Man hat dann $M_t = \mathbb{E}(M_\infty|\mathcal{F}_t)$.