

## 2.A Weitere Resultate

# 3 Wahrscheinlichkeitstheorie, Teil II

Ziel dieses Kapitels ist es, eine Einführung in die Theorie der Martingale zu geben. Zunächst führen wir den Begriff der „bedingten Erwartung“ ein.

## 3.1 Bedingte Erwartung

Seien  $\Omega$  eine Menge mit  $\#\Omega < \infty$  und  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  messbar bzgl.  $\mathcal{P}(\Omega)$ , also eine Zufallsvariable. Betrachten Sie folgende Aufgabe: Ihnen wird eine  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  gegeben und Sie sollen eine Zufallsvariable  $Y$  angeben, die einerseits  $\mathcal{E}$ -messbar ist und andererseits möglichst nah an  $X$  ist. Für  $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$  wählt man natürlich  $Y(\omega) = X(\omega) \forall \omega \in \Omega$ . Für  $\mathcal{E} = \{\emptyset, \Omega\}$  bleibt einem nichts anderes übrig, als  $X(\omega) = \mathbb{E}(X) \forall \omega \in \Omega$  zu wählen. Sei nun aber  $\mathcal{E} \neq \{\emptyset, \Omega\}$  und  $\mathcal{E} \neq \mathcal{P}(\Omega)$ . Da  $Y$  möglichst nah an  $X$  sein soll, wäre es wünschenswert, dass wenigstens die Mittel über Mengen  $M \in \mathcal{E}$  stimmen, d. h. dass

$$(3.1) \quad \sum_{\omega \in M} Y(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in M} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) \quad \forall M \in \mathcal{E} \text{ gilt .}$$

Die „bedingte Erwartung“  $\mathbb{E}(X|\mathcal{E})$  ist nun genau diejenige Zufallsvariable, welche obige Aufgabe löst.

Beispiel: Betrachtet werde ein zweifacher Münzwurf. Das zugehörige mathematische Modell ist

$$\Omega = \{KK, KZ, ZK, ZZ\} \quad \text{mit } \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{4} \quad \forall \omega \in \Omega .$$

Der Wahrscheinlichkeitsraum ist  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ , wobei  $\mathcal{P}(\Omega)$  16 Elemente hat. Sei nun  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$  definiert durch

$$X(\omega) = \text{Anzahl von Kopf „K“ in } \omega .$$

Dann ist  $\mathbb{E}(X) = 2 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = 1$ . Sei  $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  definiert durch

$$\mathcal{E} = \{\emptyset, \Omega, \{KK, KZ\}, \{ZK, ZZ\}\} .$$

Wie muss man nun  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$  definieren, so dass  $Y$  Bedingung (3.1) erfüllt und zugleich  $\mathcal{E}$ -messbar ist? Die Antwort lautet

$$Y(\omega) = \begin{cases} 3/2 & ; \omega \in \{KK, KZ\}, \\ 1/2 & ; \omega \in \{ZK, ZZ\}. \end{cases}$$

Interessant ist hier, dass man  $\mathcal{E}$  als die Menge derjenigen Ereignisse ansehen kann, die nach dem ersten Münzwurf unterscheidbar sind. Insofern stellt  $Y$  die beste Schätzung von  $X$  dar, die man nach dem ersten Wurf abgeben kann.

**Definition 3.1** Seien  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$  eine gröbere  $\sigma$ -Algebra als  $\mathcal{F}$  und  $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Eine Zufallsvariable  $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , welche  $\mathcal{E}$ -messbar ist und

$$\mathbb{E}(Y\mathbb{1}_M) = \mathbb{E}(X\mathbb{1}_M) \quad \forall M \in \mathcal{E}^{20}$$

erfüllt, heißt „bedingte Erwartung von  $X$  gegeben  $\mathcal{E}$ “ (oder unter  $\mathcal{E}$ ) und man schreibt  $\mathbb{E}(X|\mathcal{E})$  anstelle von  $Y$ .

**Satz 3.2** Unter den obigen Voraussetzungen existiert eine bedingte Erwartung  $\mathbb{E}(X|\mathcal{E})$ . Sei  $Z$  eine weitere Zufallsvariable mit den gewünschten Eigenschaften, so gilt  $Z = \mathbb{E}(X|\mathcal{E})$   $\mathbb{P}$ -fast sicher.

**Beweis:** Sei zunächst  $X \geq 0$   $\mathbb{P}$ -f.s.. Sei  $\mathbb{P}|_{\mathcal{E}}$  Restriktion des Maßes  $\mathbb{P}$  auf die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{E}$ . Die Zuordnung  $M \mapsto \mathbb{Q}(M) = \int_M X(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$  definiert nun ein neues Maß  $\mathbb{Q}$  auf  $\mathcal{E}$ , welches absolutstetig bzgl.  $\mathbb{P}|_{\mathcal{E}}$  ist. Nach dem Satz von Radon-Nikodym existiert nun eine Dichte  $Y = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{E}}}$ , welche die gewünschten Eigenschaften besitzt. Sei nun  $Z$  eine zweite solche Zufallsvariable. Da die Mengen  $\{\omega \in \Omega; Z(\omega) > Y(\omega)\}$  und  $\{\omega \in \Omega; Z(\omega) < Y(\omega)\}$  Elemente in  $\mathcal{E}$  sind, müssen beide wegen  $\int_M (Y_Z)d\mathbb{P} = 0 \forall M \in \mathcal{E}$  Maß Null haben, woraus die behauptete Eindeutigkeit folgt. Den allgemeinen Fall  $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  behandelt man wie üblich mittels einer Zerlegung  $X = X^+ + X^-$ . ■

Eine andere Möglichkeit, Satz 3.2 zu beweisen, ist, den Rieszschen Darstellungssatz zu verwenden. Sei zunächst  $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Dann ist die Abbildung  $\varphi :$

<sup>20</sup>Wir benutzen hier und im Folgenden die Notation  $\mathbb{E}(X\mathbb{1}_M) = \int_M X(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$ . Manchmal wird  $\mathbb{E}(X\mathbb{1}_M)$  auch als  $\mathbb{E}(X; M)$  geschrieben.

$L^2(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P}|_{\mathcal{E}}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(Z) = \int_{\Omega} \langle Z, X \rangle d\mathbb{P}$  ein lineares Funktional und besitzt ein darstellendes Element  $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$  mit

$$\int_{\Omega} \langle Z, X \rangle d\mathbb{P}|_{\mathcal{E}} = \int_{\Omega} \langle Z, Y \rangle d\mathbb{P}|_{\mathcal{E}} \quad \forall Z \in L^2(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P}|_{\mathcal{E}}).$$

Somit ist  $Y$  ebenfalls eine bedingte Erwartung  $\mathbb{E}(X|\mathcal{E})$ . Den allgemeinen Fall beweist man über eine Approximation durch Abschneiden.

Selbstverständlich gilt für  $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  und  $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$  die Beziehung

$$(3.2) \quad X = \mathbb{E}(X|\mathcal{E}) \quad \Leftrightarrow \quad X \text{ ist } \mathcal{E}\text{-messbar.}$$

**Definition 3.3** Seien  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  und  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Zufallsvariable. Dann bezeichnet man mit  $\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}(X|\sigma(Y))$  die „bedingte Erwartung von  $X$  gegeben  $Y$ “.

Einerseits gelten für bedingte Erwartungswerte die üblichen Eigenschaften von Erwartungswerten bzw. Integralen, z. B. Linearität, Abgeschlossenheit unter monotoner und majorisierter Konvergenz und die Jensensche Ungleichung:

**Satz 3.4** (1) Seien  $X, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ,  $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$  und  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y + \gamma|\mathcal{E}) = \alpha \mathbb{E}(X|\mathcal{E}) + \beta \mathbb{E}(Y|\mathcal{E}) + \gamma.$$

(2) Seien  $X_n, X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Es gelte  $X_{n+1}(\omega) \geq X_n(\omega)$  und  $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)$  für  $\mathbb{P}$ -fast alle  $\omega \in \Omega$ . Dann folgt

$$\mathbb{E}(X_n|\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{E}(X|\mathcal{E}) \quad \mathbb{P}\text{-f.s. } \forall \mathcal{E} \subset \mathcal{F}.$$

(3) Seien  $X_n \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und  $|X| \leq Y$   $\mathbb{P}$ -f.s. mit  $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Es gelte  $X_n \rightarrow X$   $\mathbb{P}$ -f.s.. Dann folgt

$$\mathbb{E}(X_n|\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{E}(X|\mathcal{E}) \quad \mathbb{P}\text{-f.s. } \forall \mathcal{E} \subset \mathcal{F}.$$

(4) Seien  $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ,  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  konvex und  $\varphi \circ X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Dann gilt

$$\varphi(\mathbb{E}(X|\mathcal{E})) \leq \mathbb{E}(\varphi(X)|\mathcal{E}) \quad \mathbb{P}\text{-f.s. } \forall \mathcal{E} \subset \mathcal{F}.$$

Die Beweise der obigen Aussagen entsprechen denjenigen der analogen Aussagen für einfache Erwartungswerte.

Die folgenden drei Aussagen sind neuartig und stellen auf die spezielle Struktur der bedingten Erwartungswerte ab.

**Satz 3.5** (1) Seien  $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  und  $\mathcal{D} \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{F}$   $\sigma$ -Algebra. Dann gilt

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{E})|\mathcal{D}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{D}).$$

(2) Seien  $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ,  $Y$   $\mathcal{E}$ -messbar und  $XY \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Dann gilt

$$\mathbb{E}(XY|\mathcal{E}) = Y\mathbb{E}(X|\mathcal{E}).$$

(3) Seien  $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ,  $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$  und  $X$  unabhängig von  $\mathcal{E}$ . Dann gilt

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{E}) = \mathbb{E}(X) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Es ist wichtig, Aussage (3) nicht mit Aussage (3.2) zu verwechseln.

**Beweis:** Aussage (1) folgt aus der Definition und dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz. Zum Beweis von (2) betrachten wir die Hilfsfunktion

$$t \rightarrow 2^{-n}[2^n t], \quad t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

und setzen  $\xi_n(\omega) = 2^{-n}[2^n Y(\omega)]$ . O.B.d.A. können wir  $X \geq 0, Y \geq 0$   $\mathbb{P}$ -f.s. annehmen. Die Folge  $\xi_n$  ist  $\mathbb{P}$ -f.s. monoton wachsend und erfüllt  $\xi_n \rightarrow Y$   $\mathbb{P}$ -f.s. Seien nun  $M \in \mathcal{E}$  und  $A_k = \{\omega \in \Omega; \frac{k}{2^n} \leq Y(\omega) < \frac{k+1}{2^n}\} \in \mathcal{E}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbb{E}(XY|\mathcal{E})\mathbb{1}_M) &= \mathbb{E}(XY\mathbb{1}_M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X\xi_n\mathbb{1}_M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=\sigma}^{\infty} \frac{k}{2^n} \int_{A_k \cap M} X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^n} \int_{A_k \cap M} \mathbb{E}(X|\mathcal{E})\mathbb{P}(d\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{E})\xi_n\mathbb{1}_M) \\ &= \mathbb{E}(Y\mathbb{E}(X|\mathcal{E})\mathbb{1}_M), \end{aligned}$$

woraus die Behauptung (2) folgt. Der Nachweis der dritten Behauptung folgt nun direkt mittels der zweiten Behauptung. Falls  $X$  unabhängig von  $\mathcal{E}$ , so sind  $X$  und  $\mathbb{1}_M$  für  $M \in \mathcal{E}$  unabhängig. Also gilt

$$\mathbb{E}(X\mathbb{1}_M) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(\mathbb{1}_M) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)\mathbb{1}_M),$$

und die Behauptung ist bewiesen. ■