2.2 Erste Eigenschaften der Brownschen Bewegung

Lemma 2.3 *Seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $B = \{B_t; t \geq 0\}$ ein stochastischer Prozess, welcher (i) und (ii) aus Definition 2.1 erfüllt. Dann gilt*

$$(iii) + (iv) \quad \Longleftrightarrow \quad (iii)' + (iv)' \quad \Longleftrightarrow \quad (iii)'' + (iv)',$$

wobei

(iii)' für alle $s, t \in \mathbb{R}$ gilt $\mathrm{Cov}(B_s, B_t) = \min(s,t)$,

(iv)' für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$,

(iii)" für alle $s, t \in \mathbb{R}$ mit $s < t$ sind $B_t - B_s$ und B_s unabhängig ,

Der Beweis des Lemmas beruht einzig und alleine auf Korollar 1.21 und der trivialen Beobachtung

$$\mathrm{Cov}(B_t, B_s) = \mathrm{Cov}(B_t - B_s, B_s) + \mathrm{Var}(B_s)\,.$$

Im folgenden Lemma wird die Skalierungseigenschaft der Brownschen Bewegung formuliert.

Lemma 2.4 *Seien B eine Brownsche Bewegung mit $B_0 = 0$ $\mathbb{P}$-f.s. und $a > 0$. Dann ist der durch*

$$X_t(\omega) = \frac{1}{a} B_{a^2 t}(\omega)$$

definierte Prozess X wieder eine Brownsche Bewegung.

Beweis: Der Prozess X hat stetige Pfade und stationäre unabhängige Zuwächse. Aufgrund von

$$\mathrm{Var}(X_t - X_s) = \frac{1}{a^2}\,\mathrm{Var}(B_{a^2 t} - B_{a^2 s}) = \frac{1}{a^2}(a^2 t - a^2 s) = ts$$

ist er eine Brownsche Bewegung. ∎

Neben der Skalierungseigenschaft ist die Invarianz der Brownschen Bewegung unter einer Zeitumkehr von Interesse.

Lemma 2.5 *Sei B eine Brownsche Bewegung mit $B_0 = 0\,\mathbb{P}-$f.s.. Dann ist der durch*

$$X_t(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{für } t = 0\,, \\ tB_{\frac{1}{t}} & \text{für } t > 0\,, \end{cases}$$

definierte Prozess X wieder eine Brownsche Bewegung.

Beweis: Sei $s < t$. Dann gilt

$$\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = st\,\mathrm{Cov}\left(B_{\frac{1}{t}}, B_{\frac{1}{s}}\right) = st \min\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{s}\right) = \min(s,t)\,.$$

Zu prüfen bleibt die Stetigkeit $\mathbb{P}$-fast aller Pfade im Punkt $t = 0$. Wegen $tB_{\frac{1}{t}} \sim N(0,t)$ folgt aber auch wie gewünscht $\lim_{t\to 0} X_t = 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher. ■

Nun geben wir noch einige Resultate über die Pfad-Eigenschaften der Brownschen Bewegung an, allerdings ohne Beweis. Der erste Satz ist eine direkte Folge der im vorherigen Abschnitt verwendeten Konstruktion.

Satz 2.6 *Es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $h \in (0,1)$ und alle $t > 0$ mit $t + h < 1$*

$$|B_{t+h} - B_t| \le C\sqrt{h \ln(\tfrac{1}{h})} \quad \mathbb{P}\text{-f.s. gilt}.$$

Korollar 2.7 *Für $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ sind $\mathbb{P}$-fast alle Pfade einer Brownschen Bewegung Hölder-stetig mit Exponent α.*

Die Regularität der Pfade einer Brwonschen Bewegung ist allerdings auch nicht viel besser, siehe den folgenden Satz.

Satz 2.8

(a) Seien $0 < c < \sqrt{2}$ und $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$\mathbb{P}\Big\{\omega; \big|B_{t+h}(\omega) - B_t(\omega)\big| \le c\sqrt{h \log \tfrac{1}{h}} \forall h \in (0,\varepsilon) \forall t \in [0, 1-h)\Big\} = 0\,.$$

(b) $\mathbb{P}-$ fast sicher gilt $\lim_{h\to 0} \sup_{0\le t\le 1-h} \frac{|B_{t+h} - B_t|}{\sqrt{2h \log(\frac{1}{h})}} = 1$,

(c) Für $\mathbb{P}-$ fast alle $\omega \in \Omega$ ist die Funktion $t \mapsto B_t(\omega)$ an keiner Stelle t differenzierbar.

Aussage (a) lässt sich elementar beweisen. Aussage (b) wurde 1937 von Lévy beweisen und Aussage (c) 1933 von Paley, Wiener und Zygmund.