

2 Die Brownsche Bewegung, Teil I

Die Bezeichnung "Brownsche Bewegung" geht auf den britischen Botaniker Robert Brown¹² zurück, der die Bewegung von Pollen auf der Wasseroberfläche durch ein Mikroskop beobachtete und versuchte, in Worte zu fassen. Angeregt durch die Untersuchung von Finanzspekulationen arbeitete der Franzose Bachelier¹³ eine erste Theorie der Brownschen Bewegung aus. 1905 studierte Einstein¹⁴ in seiner Arbeit über die molekularkinetische Theorie der Wärme die Brownsche Bewegung, ohne Bezug auf die Arbeiten von Bachelier zu nehmen. Die Existenz einer Brownschen Bewegung wurde rigoros zuerst von Wiener¹⁵ 1923 bewiesen.

Definition 2.1 *Ein stochastischer Prozess $B = \{B_t; B_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, t \geq 0\}$ mit Werten in \mathbb{R} wird (eindimensionale) "Brownsche Bewegung" genannt, wenn er folgende Eigenschaften hat:*

- (i) \mathbb{P} -fast sicher gilt: $B_0(\omega) = 0$.¹⁶
- (ii) \mathbb{P} -fast sicher gilt: $t \mapsto B_t(\omega)$ ist stetig.
- (iii) Für alle $N \in \mathbb{N}$ und $\{t_k \in I; t_{k-1} < t_k \text{ und } k = 1, \dots, N\}$ gilt:
Die Zufallsvariablen $B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_3} - B_{t_2}, \dots, B_{t_N} - B_{t_{N-1}}$ sind unabhängig.
- (iv) Für alle $t, s \in I$ mit $s < t$ gilt: $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$.

Ein stochastischer Prozess B mit Werten in \mathbb{R}^d , $d \geq 1$, wird d -dimensionale Brownsche Bewegung genannt, wenn er sich als Vektor von eindimensionalen, unabhängigen Brownschen Bewegungen schreiben lässt.

¹²Robert Brown, 1773 (Montrose/Scotland) - 1773 (London)

¹³Louis Bachelier, 1870 (Le Havre) - 1946 (St-Servan-sur-Mer). Erfinder der Finanzmathematik. Da seine Resultate teilweise nicht rigoros bewiesen waren und P. Lévy eine Arbeit anscheinend missverstanden, wurde er zu Lebenszeiten in Frankreich nicht seinen Leistungen entsprechend gewürdigt.

¹⁴Albert Einstein, 1879 (Ulm) -1955 (Princeton/New Jersey), Physiker.

¹⁵Norbert Wiener, 1894 (Columbia/Missouri) -1964 (Stockholm), U.a. Vater der Kybernetik, fundamentale Beiträge auf dem Gebiet der harmonischen Analysis.

¹⁶Wegen Eigenschaft (i) wird B auch manchmal "standardisierte Brownsche Bewegung" genannt, wobei dieser Begriff im Englischen besser als im Deutschen klingt. H. Bauer nennt B mit Startpunkt Null in seinem Lehrbuch "normale" Brownsche Bewegung.

2.1 Die Konstruktion nach P. Lévy

Wir geben im Folgenden eine Konstruktion der Brownschen Bewegung. Die Methode geht auf eine Arbeit von Lévy¹⁷ (1948) und eine Vereinfachung von Ciesielski (1961) zurück.

Satz 2.2 *Es gibt eine Brownsche Bewegung.*

Beweis: Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, auf dem eine abzählbare unendliche Familie von unabhängigen $\mathcal{N}(0, 1)$ -Zufallsvariablen existiert.

Schritt 1: Es ist ausreichend, eine Brownsche Bewegung auf $I = [0, 1]$ zu konstruieren. Sei $(B^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von unabhängigen Brownschen Bewegungen auf $[0, 1]$. Dann ist

$$B_t = B_{t-[t]}^{[t]} + \sum_{j=0}^{[t]-1} B_1^j$$

mit $[t] = \max\{k \in \mathbb{N}_0, k \leq t\}$ eine Brownsche Bewegung auf $[0, \infty)$.

Schritt 2: Seien $n \in \mathbb{N}_0$, $D_n = \{\frac{k}{2^n}; k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 2^n\}$ und $D = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$. Sei $\{Z_t\}_{t \in D}$ eine Sammlung von unabhängigen $\mathcal{N}(0, 1)$ -Zufallsvariablen auf Ω . Wir setzen hier voraus, dass eine solche Sammlung existiert und verweisen auf die Kommentare in der Vorlesung. Wir definieren nun eine Folge $(F_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von zufälligen stetigen Funktionen $F_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Es seien $F_0(t) = tZ_1$ und für $n \geq 1$

$$(2.1) \quad F_n(t) = \begin{cases} \frac{Z_t}{\sqrt{2^{n+1}}} & \text{für } t \in D_n \setminus D_{n-1}, \\ 0 & \text{für } t \in D_{n-1}, \\ \text{linear} & \text{zwischen Nachbarpunkten aus } D_n. \end{cases}$$

Die Wahl des Skalierungsfaktors $\frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}}$ wird erst in Schritt 4 verständlich. Definiere nun für $n \geq 1$ und $t \in D_n \setminus D_{n-1}$

$$(2.2) \quad \begin{aligned} B_0 &= 0, & B_1 &= Z_1, \\ B_t &= \sum_{i=0}^n F_i(t) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i(t), \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung gilt, da $F_i(t) = 0$ für alle $t \in D_n$ und $i \geq n + 1$.

¹⁷Paul Pierre Lévy, 1886 (Paris) -1971 (Paris), französischer Mathematiker, Mitbegründer der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie.

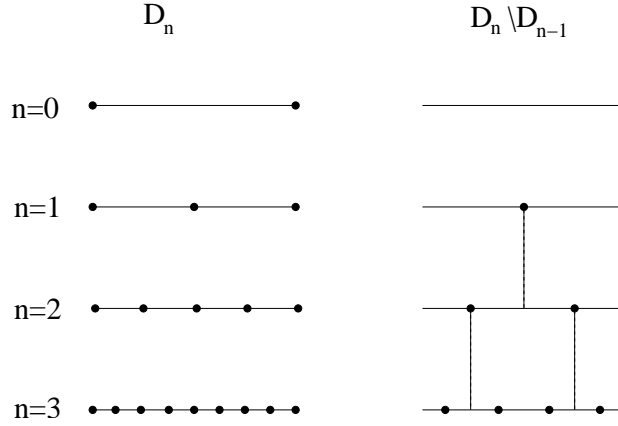


Abbildung 1: Die Mengen D_n und $D_n \setminus D_{n-1}$

Schritt 3: Für $n \geq 1$ und $t \in D_n \setminus D_{n-1}$ seien $t^+ = t + 2^{-n}$ und $t^- = t - 2^{-n}$ rechte und linke Nachbarpunkte von t . Diese liegen in D_{n-1} . Wir zeigen, dass gilt:

$$(2.3) \quad B_t = \frac{B_{t^+} + B_{t^-}}{2} + \frac{Z_t}{\sqrt{2^{n+1}}} \quad \forall n \geq 1, \forall t \in D_n \setminus D_{n-1}.$$

Für $n = 1$ ist (2.3) richtig, denn es gilt $D_1 \setminus D_0 = \{\frac{1}{2}\}$ und nach (2.2) $B_{\frac{1}{2}} = \frac{Z_1}{2} + \frac{Z_{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2^{n+1}}}$. (2.3) gilt im Allgemeinen, denn nach Definition gilt für $t \in D_n \setminus D_{n-1}$ die Beziehung $B_t = \sum_{i=0}^{n-1} F_i(t) + F_n(t)$, einerseits $F_n(t) = \frac{Z_t}{\sqrt{2^{n+1}}}$ und andererseits

$$\sum_{i=0}^{n-1} F_i(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{F_i(t^+) + F_i(t^-)}{2} \right) = \frac{B_{t^+} + B_{t^-}}{2},$$

da F_i für $i \leq n-1$ eine lineare Funktion auf dem Intervall $[t^-, t^+]$ ist. Hier haben wir $t^+, t^- \in D_{n-1}$ verwendet. Somit ist (2.3) bewiesen.

Schritt 4: Wir beweisen nun folgende Eigenschaften der Abbildung $B : \Omega \times D \rightarrow \mathbb{R}$:

- (a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann sind die Zufallsvariablen $B_t, t \in D_n$ unabhängig von den Zufallsvariablen $Z_t, t \in D \setminus D_n$.
- (b) Seien t_1, t_2, t_3, t_4 aus D_n mit $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$. Dann gilt $B_{t_4} - B_{t_3} \sim \mathcal{N}(0, t_4 - t_3)$ und $B_{t_4} - B_{t_3}$ ist unabhängig von $B_{t_2} - B_{t_1}$.

Damit ist B eine diskrete Version der Brownschen Bewegung und die Wahl des Skalierungsparameters $\frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}}$ in Schritt 1 ist erklärt. Aussage (a) ist offensichtlich wahr,

da für festes $n \in \mathbb{N}$ die Größen $B_t, t \in D_n$, ohne Verwendung der Zufallsvariablen $Z_t, t \in D \setminus D_n$, definiert sind. Aussage (b) beweisen wir über vollständige Induktion. Wir weisen (b) zunächst für $n = 1$ nach. Es gilt

$$B_1 - B_{\frac{1}{2}} = \frac{B_1}{2} - \frac{Z_{\frac{1}{2}}}{\sqrt{4}}, \quad B_{\frac{1}{2}} - B_0 = \frac{B_1}{2} + \frac{Z_{\frac{1}{2}}}{\sqrt{4}}.$$

Wegen (a) und Korollar 1.19 folgt nun Aussage (b) für $n = 1$. Es gelte nun (b) für alle $k = 1, \dots, n$.

1) Auf der Ebene D_{n+1} beweisen wir (b) zuerst für die spezielle Situation $s \in D_{n+1} \setminus D_n$ und $r = s^-, t = s^+$. Seien $X = \frac{1}{2}(B_t - B_r)$ und $Y = \frac{Z_s}{\sqrt{2^{n+2}}}$. X und Y sind unabhängig und beide gemäß $\mathcal{N}(0, 2^{-(n+2)})$ verteilt. Nach Korollar 1.19 sind dann auch $X + Y = B_s - B_r$ und $X - Y = B_t - B_s$ unabhängig und beide $\mathcal{N}(0, 2^{-(n+1)})$ verteilt, was zu beweisen war.

2) Nun betrachten wir die allgemeinere Situation $s \in D_{n+1}, r = s - 2^{-(n+1)}, t = s + 2^{n+1}$. Den Fall $s \in D_{n+1} \setminus D_n$ haben wir eben bereits behandelt. Sei nun $k = \min\{j \in \mathbb{N}_0; s \in D_j\}$, also $s \in D_k \setminus D_{k-1}$. Indem man B_r sukzessive mit Hilfe von (2.3) ersetzt, beweist man

$$B_s - B_r = c_{n,k}(B_s - B_{s^-}) - \sum_{v \in M_1} c_{v,n,k} Z_v, \quad B_t - B_s = c_{n,k}(B_{s^+} - B_s) - \sum_{v \in M_2} c_{v,n,k} Z_v$$

wobei $c_{n,k}$ Konstanten und M_1, M_2 disjunkte Mengen aus D_{n+1} sind.¹⁸ Da sowohl $(B_s - B_{s^-})$ und $(B_{s^+} - B_s)$ nach Induktionsvoraussetzung unabhängig als auch M_1 und M_2 diskunkt sind, folgt dass $B_s - B_r$ und $B_t - B_s$ unabhängig sind. Die Aussage $B_s - B_r \sim \mathcal{N}(0, 2^{-(n+1)})$ folgt bereits aus der Tatsache $B_s - B_r = B_{r^+} - B_r$ und $r \in D_{n+1} \setminus D_n$. Diesen Fall haben wir bereits behandelt. Damit ist (b) im Fall $s \in D_{n+1}, r = s - 2^{-(n+1)}, t = s + 2^{n+1}$ bewiesen.

3) Zuletzt macht man sich klar, dass damit die Familie $\{B_t - B_{t-2^{n+1}}, t \in D_{n+1}\}$ unabhängig ist. Da die einzelnen Zufallsvariablen normal verteilt sind, reicht hier nach Korollar 1.21 die paarweise Unabhängigkeit, d.h. $B_{t_4} - B_{t_3}$ unabhängig von $B_{t_2} - B_{t_1}$. Diese haben wir im interessanten Fall $s = t_3 = t_2 \in D_{n+1}, t_1 = s - 2^{-(n+1)}, t_4 = s + 2^{n+1}$ in Schritt 2) gezeigt, der Fall zweier disjunkter Zeitintervalle wird analog bewiesen.

¹⁸Die Einzelheiten sind hier nicht wichtig, ungefähr müsste der Zusammenhang wie folgt sein:

$$(2.4) \quad B_s - B_r = \frac{B_s - B_{s^-}}{2^{n+1-k}} - \sum_{j=1}^{n+1-k} 2^{-j+1} \frac{\widetilde{Z}_j}{\sqrt{2^{n+1-j+1}}},$$

wobei $\widetilde{Z}_j = Z_j$ mit $j = r - 2^{-(n+1)} - 2^{-n} - 2^{-(n-1)} - \dots - 2^{-(n+1-j)}$ gilt. Eine entsprechende Aussage gilt nun für $B_t - B_s$.

4) Schließlich kann man den allgemeinen Fall t_1, t_2, t_3, t_4 aus D_{n+1} über Kettensummen auf den eben behandelten zurückführen. Damit ist der Induktionsschluss $n \rightsquigarrow n+1$ vollständig. Aussage (b) ist bewiesen.

Schritt 5: Wir setzen nun für festes $\omega \in \Omega$ und $t \in [0, 1]$ $B_t = \sum_{j=0}^{\infty} F_j(t)$ und wollen zeigen, dass die Abbildung $t \mapsto B_t$ für \mathbb{P} -fast alle ω stetig ist. Da die F_j stetige Funktionen sind, ist es ausreichend, die gleichmäßige Konvergenz der Summe zu zeigen. Nach Lemma 1.15 wissen wir

$$\mathbb{P}(|Z_t| \geq c\sqrt{n}) \leq \frac{1}{c\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{c^2 n}{2}} \leq e^{-\frac{c^2 n}{2}}$$

für jedes $c > 0$ und n groß genug in Abhängigkeit von c . Sei nun

$$A_n = \{\omega \in \Omega; \exists t \in D_n : |Z_t| \geq c\sqrt{n}\}$$

Dann folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{t \in D_n} \mathbb{P}(|Z_t| \geq c\sqrt{n}) \leq \sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 1) e^{-\frac{c^2 n}{2}}.$$

Also konvergiert die Summe $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$ für jedes $c > \sqrt{2 \ln 2}$. Mit Hilfe von (1.7) folgt dann $\mathbb{P}(\text{"}A_n \text{ i.o. "}) = 0$. Also existiert für \mathbb{P} -fast alle $\omega \in \Omega$ ein $N(\omega)$ mit $\omega \notin A_n \forall n \geq N(\omega)$, was wiederum bedeutet, dass $|Z_t| < c\sqrt{n}$ für alle $t \in D_n$ und für alle $n \geq N(\omega)$. Also gilt nun

$$\sup_{t \in [0,1]} |F_n(t)| < c\sqrt{n} 2^{-n/2} \quad \forall n \geq N(\omega) \text{ für } \mathbb{P} - \text{fast alle } \omega.$$

Also ist sind die F_j für festes ω gleichmäßig summierbar und die Abbildung $t \mapsto B_t$ ist für \mathbb{P} -fast alle ω stetig.

Schritt 6: Zuletzt muss gezeigt werden, dass auch die Zuwächse des Prozesses $B = \{B_t; t \in [0, 1]\}$ die gewünschten Eigenschaften haben. Sei $\{t_j\}_{j=0}^N$ eine Zerlegung des Intervalls $[0, 1]$. Seien $(t_{j,k})_{k=1}^{\infty}$ Folgen mit $t_{j,k} \in D \forall k$ und $t_{j,k} \rightarrow t_j$ für $k \rightarrow \infty$. Einerseits gilt aufgrund der Stetigkeit der Pfade

$$(2.5) \quad B_{t_{j+1,k}} - B_{t_{j,k}} \rightarrow B_{t_{j+1}} - B_{t_j} \quad \mathbb{P} - \text{fast sicher}.$$

Auf der anderen Seite gilt

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}(B_{t_{j+1,k}} - B_{t_{j,k}}) &= 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \text{Cov}(B_{t_{j+1,k}} - B_{t_{j,k}}, B_{t_{i+1,k}} - B_{t_{i,k}}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{\{i=j\}} (t_{j+1,k} - t_{j,k}) \\ &= \mathbb{1}_{\{i=j\}} (t_{j+1} - t_j). \end{aligned}$$

Mit (2.5) folgt auch, dass $\mathbb{P}_{B_{t_{j+1},k}-B_{t_j,k}} \rightarrow \mathbb{P}_{B_{t_{j+1}}-B_{t_j}}$. Wie in Lemma 1.20 zeigt man, dass (2.6) die Folgerung $\mathbb{P}_{B_{t_{j+1}}-B_{t_j}} = \mathcal{N}(0, t_{j+1} - t_j)$ impliziert.

Die Konstruktion ist damit abgeschlossen und Satz 2.2 bewiesen. ■