Stochastische Differentialgleichungen

Eine Einführung

M. Kassmann

23. Mai 2006

Warnung: Diese Mitschrift ist noch in der allerersten Phase. Der Leser dieser Notizen sollte sich daher darüber im Klaren sein, dass der Text möglicherweise voller Fehler ist und dieser Umstand mir als Autor bekannt ist. Über Hinweise, Kritik und Anmerkungen per email an

kassmann@iam.uni-bonn.de

freue ich mich umso mehr. Allen, die mich auf Fehler aufmerksam machen, wird in gebührender Form gedankt werden

Vorwort

Viele aktuelle Probleme der Angewandten Mathematik werden heute sowohl mit Methoden der klassischen Analysis (z.Bsp. partielle Differentialgleichungen) als auch mit Methoden der stochastischen Analysis formuliert und behandelt. Mathematikern, die sich im Rahmen des Studiums oder der Promotion mit partiellen Differentialgleichungen, der Funktionalanalysis oder der harmonischen Analysis beschäftigt haben, scheint es schwer zu fallen, sich in die Sprache der Wahrscheinlichkeitstheorie einzuarbeiten. Und das, obwohl die Wahrscheinlichkeitstheorie ja auf der Maßtheorie basiert.

Ziel dieses Kurses ist es, zentrale Begriffe der stochastischen Analysis wie Brownsche Bewegung und stochastische Differentialgleichungen einzuführen und zu diskutieren. Es werden keinerlei Kenntnisse der Wahrscheinlichkeitstheorie vorausgesetzt. Erste handschriftliche Notizen habe ich im Rahmen meiner Vorbereitungen auf die Winterschule der Universität Basel (27.2.2006 - 3.3.2006) erstellt. Der Umfang des Kurses dort betrug 10 Doppelstunden bzw. 5 Tage. Der Kurs richtete sich an Mathematiker mit guten bis sehr guten Vorkenntnissen in der Analysis. Mutige Studierende des fünften bzw. siebten Semesters sollten den Notizen folgen können. Es gibt bereits verschiedene Darstellungen, z.Bsp. [Eva04], die den analytischen Aspekt der stochastischen Analysis betonen und Gemeinsamkeiten hervorheben. Ich möchte im Kurs aber auch versuchen, insbesondere die Unterschiede zur "deterministischen" Analysis hervorzuheben.

Im Idealfall versteht der Hörer/die Hörerin nach dem Kurs einerseits sehr gut, was Brownsche Bewegung, Itô-Integral und stochastische gewöhnliche Differentialgleichungen sind und kann sich andererseits in Arbeiten zurechtfinden, die die Sprache der stochastischen Analysis benutzen. Der Kurs soll u.a. befähigen, im Anschluss einen fortgeschrittenen Kurs über Finanzmathematik oder einen einführenden Kurs in die Theorie stochastischer partieller Differentialgleichungen zu hören.

Gliederung:

1. Wahrscheinlichkeitstheorie, Teil I: Wahrscheinlichkeitsraum, Zufallsvariablen, charakteristische Funktion und Unabhängigkeit, Gaußsche Zufallsvariablen, stochastische Prozesse.
2. Konstruktion der Brownschen Bewegung nach P. Lévy.
3. Erste Eigenschaften der Brownschen Bewegung.
4. Wahrscheinlichkeitstheorie, Teil II: Martingale, Quadratische Variation.
5. Das Itô-Integral.
6. Stochastische Differentialgleichungen.
7. Konstruktion der Brownschen Bewegung mittels des Invarianzprinzips.
8. Das Martingal-Problem.

Kommentiertes Literaturverzeichnis (nicht geordnet)

[Eva04] Ein Skript von L.C. Evans aus Berkeley für Studierende des fünften Semesters. Der Autor ist in mehrfacher Hinsicht genial, das Skript ist sehr gut lesbar. Die Wahrscheinlichkeitstheorie wird soweit wie möglich ausgeblendet.

[Kal02] Ein einzigartiges Kompendium der "gesamten" Wahrscheinlichkeitstheorie. Knapp, präzise, aber dennoch umfassend.

[KS91] Sehr ausführlich und detailliert. Behandelt Brownsche Bewegung (vier verschiedene Konstruktionen) und stochastische Differentialgleichungen. Wenn man Detailfragen hat, findet man hier die Antworten.

[RY99] Vom Inhalt ist das Buch [KS91] ähnlich, die Darstellung ist sehr elegant. Die Autoren haben die stochastische Analysis stark mitgeprägt. Nicht für Einsteiger zu empfehlen.

[Oks03] Ein Verkaufsschlager. Wirkt auf den ersten Blick irgendwie unschuldig oder oberflächlich, ist es aber nicht. In gewisser Hinsicht ist [Eva04] ein Auszug von [Oks03]. Behandelt Differentialgleichungen, ohne den Anspruch zu haben, die gesamte Theorie erklären zu müssen. Wenn alle Finanzmathematiker [Oks03] gelesen hätten, müsste man sich als Anleger keine Sorgen machen.

[Bas95] Bietet auf den ersten 50 Seiten einen steilen Einstieg in die stochastische Analysis. Ziel des Buches ist es, bekannte Sätze der Analysis und der harmonischen Analysis mit Hilfe von probabilistischen Methoden zu beweisen.

[Dur96] Bietet mehr Wahrscheinlichkeitstheorie als [Oks03] aber weniger Theorie als [KS91]. Liegt irgendwo dazwischen. Besonders interessant sind viele Hinweise auf mögliche "Fallen". R. Durrett ist generell als Autor sehr beliebt.

[Kry02] N. Krylov wäre nicht N. Krylov, wenn sein Buch nicht irgendwie aus der Reihe tanzen würde. Notation und Gliederung sind nicht Standard, das Buch ist dennoch für Einsteiger geschrieben. Unheimlich gewinnbringend, wenn man es einmal komplett durchgelesen hat. Beinhaltet auch in Ansätzen Prozesse mit nicht-stetigen Pfaden.

Literatur

[Bas95] Richard F. Bass. *Probabilistic techniques in analysis.* Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, 1995.

[Dur96] Richard Durrett. *Probability: theory and examples.* Duxbury Press, Belmont, CA, second edition, 1996.

[Eva04] L. C. Evans. *Introduction to stochastic differential equations, Version 1.2*, 2004. see webpage of L.C. Evans, University of California, Berkeley (USA).

[Kal02] Olav Kallenberg. *Foundations of modern probability.* Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, second edition, 2002.

[Kry02] N. V. Krylov. *Introduction to the theory of random processes*, volume 43 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[KS91] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.

[Oks03] Bernt Oksendal. *Stochastic differential equations.* Universitext. Springer-Verlag, Berlin, sixth edition, 2003. An introduction with applications.

[RY99] Daniel Revuz and Marc Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences].* Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1999.