

1 Übersicht über Approximationssysteme

Karl Scherer(SS 2007)

Die Approximationstheorie beschäftigt sich damit, Daten bzw. mathematische Objekte in Form von explizit gegebenen Vektoren oder Funktionen zu approximieren. Als Anwendung kann man implizit gegebene Funktionen approximieren, z.B. als Lösung von Gleichungen bzw. Differentialgleichungen oder als Integrale. Dies führt aber auf weitere Gebiete, wie z.B. Theorie und Numerik von Differentialgleichungen, Numerische Integration.

Die Aufgaben der Approximationstheorie werden am besten verdeutlicht durch das Problem der **besten Approximation**. Dies ist die folgende Fragestellung:

Gegeben sei ein linearer normierter Raum X (in Zukunft abgekürzt zu LNR X) und eine nicht-leere Teilmenge M von X . Zu einem gegebenem Element $f \in X$ bestimme man

$$(1) \quad \text{dist}(f; M)_X = \inf_{g \in M} \|f - g\|_X$$

Wir bezeichnen ein Element $g_0 \in M$ als *beste Approximation zu f aus M* , falls gilt

$$(2) \quad \text{dist}(f; M)_X = \|f - g_0\|_X$$

Die Menge aller besten Approximationen zu $f \in X$ aus M wird mit $P_M f$ bezeichnet. Dadurch wird eine i. A. mengenwertige Abbildung $P_M : f \in X \rightarrow P_M f \in 2^M =$ Potenzmenge von M (= Menge aller Teilmengen von M) definiert, die als *metrische Projektion von X auf M* bezeichnet wird.

Eine Variante - die vor allem bei der Wahl von nichtlinearen Mengen M wichtig wird - ist der Begriff der *lokal besten Approximation zu f aus M* . Ein Element $g_1 \in M$ wird als solche bezeichnet, falls eine Kugel $B(g_1; r) := \{g \in X : \|g_1 - g\| \leq r\}$ mit Radius $r > 0$ um g_1 existiert, so dass

$$(3) \quad \|f - g_1\| = \text{dist}(f; M \cap B(g_1; r))_X$$

Diese Probleme werden nun für alle möglichen Vorgaben von X , f und M betrachtet, wobei zunächst interessieren der *qualitative Aspekt* interessiert, d. h. die Frage nach Existenz, Eindeutigkeit (bzw. lokaler Eindeutigkeit) und Charakterisierung von Elementen bester Approximation. Letztere Fragestellung ist besonders wichtig, da erst sie zu praktischen Verfahren zur Berechnung einer besten Approximation führt.

Ein anderer zentraler Aspekt ist der *quantitative*, wo man die Größe von $\text{dist}(f; M)_X$ in Abhängigkeit von den Eigenschaften von f , X und M untersucht. Insbesondere möchte man eine Folge von Untermengen $\{M_n\}_{n=1}^\infty$ mit $M_n \subset M_{n+1}$ finden, deren Vereinigung *dicht* in einem LNR X ist, d.h. für die

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(f; M_n)_X = 0, \quad \forall f \in X$$

gilt. Eine typische solche Aussage liefert der berühmte Satz von Weierstrass (1885), nach dem jede Funktion aus $C[a, b]$ (=Menge der stetigen reellwertigen Funktionen auf einem beschränkten Intervall $[a, b]$) beliebig gut durch algebraische oder trigonometrische Polynome gleichmässig approximiert werden kann. Neben der Frage nach der Konvergenz kann man hier auch genauer nach die Güte oder Approximationsrate untersuchen, d.h. wie schnell die Folgen in (4) gegen null streben. Dies ist der Inhalt der ebenfalls sehr bekannten Sätze von D. Jackson 1911 und von S.N. Bernstein 1912. Die *quantitative Approximationstheorie* verallgemeinert diese Aussagen auf

die verschiedensten Approximationsverfahren. Sie wird in späteren Kapiteln behandelt und ist von großer Bedeutung, da es oft zu schwierig oder zu aufwendig wird, die beste Approximation zu berechnen. Insbesondere trifft dies auf die beste Approximation von Funktionen mehrerer Variablen zu. Dann ist es notwendig, zu einfacheren Approximationsprozessen überzugehen, die sich *quantitativ* aber „fast“ wie die beste Approximation verhalten. Solche Verfahren, z. B. die Interpolation, sind in der Regel linear in f .

Es folgt eine Übersicht der wichtigsten Typen von Funktionen, die in der Theorie der besten Approximation betrachtet werden. Am einfachsten und verbreitetsten ist die Approximation durch lineare Teilräume. Dies wird als **lineare Approximationstheorie** bezeichnet. Darunter fallen:

1.1 Approximation durch Polynome

Die einfachsten Teilräume von $X = C[a, b]$ sind

$$(5) \quad \Pi_k := \left\{ g(x) : g(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k, \quad a_j, x \in \mathbb{R} \right\}$$

Es bezeichnet also $\Pi_k = \Pi_k(\mathbb{R})$ die Menge der reellwertigen Polynome einer reellen Variablen vom Grad $\leq k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Eine grundsätzlich andere Angelegenheit ist die Approximation mit Polynomen einer komplexen Variablen auf einem Gebiet der komplexen Ebene. Dies führt zur Approximationstheorie im Komplexen, die in dieser Vorlesung nicht betrachtet wird. Der Leser sei zur Einführung auf die Bücher von D. Gaier(1987) und J. L. Walsh (1956) verwiesen.

1.2 Approximation mit trigonometrischen Polynomen

Wir definieren als Teilräume von $X = C^*[a, b]$ Menge der 2π -periodischen, stetigen reell(komplex)-wertigen Funktionen

$$(6) \quad \Pi_k^* := \left\{ g(x) : g(x) = a_0 + \sum_{j=1}^k [a_j \cos jx + b_j \sin jx] , \quad a_j, b_j, x \in \mathbb{R} \right\}$$

Eine äquivalente Darstellung liefert die komplexe Schreibweise

$$(7) \quad \Pi_k^* = \left\{ g(x) : g(x) = + \sum_{j=-k}^k c_j e^{ijx} , \quad c_j \in \mathcal{C}, \quad c_j = \overline{c_{-j}}, \quad x \in \mathbb{R} \right\}$$

Mit der Euler-Formel ergibt sich konkret $c_{\pm j} = (a_j \pm ib_j)/2$, $1 \leq j \leq k$, $c_0 = a_0$.

Der Zusammenhang mit gewöhnlichen Polynomen ergibt sich durch die Substitution der Variablen $x = \cos t$. Genauer gilt

$$g(x) \in \Pi_k \iff g^*(t) := g(\cos t) \in \Pi_k^{**} := \left\{ g(x) : g(x) = \sum_{j=0}^k a_j \cos jx, \quad a_j, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Weierstrass bewies wie bereits bemerkt, dass die Menge aller trigonometrischen Polynome dicht in $C^*[-\pi, \pi]$ ist. Eine sehr wichtige Folgerung daraus ist, dass die *Fourier-Reihe* von $f \in C^*[-\pi, \pi]$ im quadratischen Mittel gegen f konvergiert, d.h.

$$(8) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| f(x) - \sum_{j=-k}^k c_j e^{ijx} \right\|_{2, [-\pi, \pi]}^2 \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \sum_{j=-k}^k c_j e^{ijx} \right|^2 dx = 0.$$

1.3 Approximation mit verallgemeinerten Exponentialsummen

Zu einem gegebenen „Satz von Frequenzen“ $\vec{\lambda} := \{\lambda_j\}_{j=1}^{\rho}$ mit paarweise verschiedenen λ_j und einer Folge $\vec{r} := \{r_j\}_{j=1}^{\rho}$ von natürlichen Zahlen definieren wir

$$\mathcal{E}(\vec{\lambda}, \vec{r}) := \left\{ g(x) : g(x) = \sum_{j=1}^{\rho} p_j(x) e^{\lambda_j x}, p_j(x) \in \Pi_{r_j}, 1 \leq j \leq \rho \right\}$$

Im Falle $r_j = 0, 1 \leq j \leq \rho$ sprechen wir von *Exponentialsummen mit einfachen Frequenzen*. Durch die Substitution $t = \exp x$ kommen wir dann zur Approximation mit

$$\text{Span}\{t^{\lambda_1}, \dots, t^{\lambda_{\rho}}\}$$

Dieser Approximationstyp wird als *Müntz-Approximation* bezeichnet. Wir gehen nicht darauf ein, er hat aber in der Literatur gewisse Beachtung gefunden, siehe das Buch von Cheney 1966, §6.2. Bezüglich neuerer Fortschritte auf diesem Gebiet sei auf den Artikel von M. v. Golitschek im Tagungsband „Approximationstheorie V“ (Chui-Schumaker-Ward eds.), Acad. Press 1986 verwiesen.

Eine andere Erweiterung der Polynomapproximation bildet die

1.4 Approximation mit (polynomialen) Spline-Funktionen k -ter Ordnung

Gegeben sei ein Intervall (a, b) (endlich, halbendlich oder gleich \mathbb{R}) sowie eine *Zerlegung*

$$(9) \quad \Delta := \{a \equiv t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} \equiv b\} \quad \text{mit Knoten } t_1 \dots t_n .$$

Jedem Knoten t_i sei eine Vielfachheit $z_i, 1 \leq z_i \leq k+1$ zugeordnet mit $Z := (z_1, \dots, z_n)$. Setze

$$\mathcal{S}(k, \Delta, Z) := \left\{ s(x) : \begin{array}{ll} \text{i)} & s(x)|_{(t_i, t_{i+1})} \in \Pi_k \quad , \quad 0 \leq i \leq n \\ \text{ii)} & s^{(\nu)}(t_i-) = s^{(\nu)}(t_i+) \quad , \quad 0 \leq \nu \leq k - z_i, 1 \leq i \leq n \end{array} \right\}$$

Die Elemente dieser Menge werden als *Splines vom Grad k* (bzw. der *Ordnung $k+1$*) mit *Knoten* t_1, \dots, t_n und *Glattheit C^{k-1-z_i}* an der Stelle t_i bezeichnet. Als Splines im eigentlichen Sinne bzw. im klassischen Sinne werden solche mit *einfachen Knoten*, d. h. $z_i = 1$, bezeichnet. Es sind dies die glatttest möglichen nichttrivialen Splines, sie liegen in $C^{k-1}(\mathbb{R})$. Ein anderer Grenzfall liegt vor, wenn $z_i = k+1$ gilt. Dann ist $C^{-1}(\mathbb{R})$ als $L_{\infty}(\mathbb{R})$ zu verstehen, speziell sind Spline-Funktionen erster Ordnung stückweise konstante Funktionen. Im Übrigen sind Splines in den Knoten immer durch *rechtsseitige Stetigkeit* definiert.

Polynomiale Spline-Funktionen sind die allgemeinsten Funktionen, die allein mittels Addition und Multiplikation berechnet werden können und daher evidenterweise für die Praxis von größtem Interesse. *Verallgemeinerte Spline-Funktionen* sind Funktionen, die stückweise im Nullraum eines linearen Differentialoperators fester Ordnung liegen, z. B. stückweise trigonometrische Polynome oder Exponentialsummen. Dazu wird auf die umfangreiche Spezialliteratur, speziell auf L. L. Schumaker „Spline Functions. Basic Theory“ (Wiley 1981) verwiesen.

Zur *quantitativen* Approximation werden bei Splines Folgen von Zerlegungen in (9) betrachtet, z.B. Partitionen $\Delta_h := \{t_i = a + i \cdot h, 0 \leq i \leq n+1\}$ mit äquidistant verteilten Knoten t_i der „Gitterweite“ $h := (b-a)/n$. Für diese - nach I.J.Schoenberg als *Cardinal Splines* bezeichnet - existiert eine besonders reichhaltige und elegante Theorie.

Eine in den meisten Lehrbüchern über Approximationstheorie nicht behandelte Approximationsart, die in der mathematischen Theorie der Signalverarbeitung gebraucht wird, ist die

1.5 Approximation mit bandbegrenzten Funktionen

Es seien $L_p(-\infty, \infty)$, $1 \leq p \leq \infty$ die üblichen Lebesgue-Räume reellwertiger Funktionen und $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ der Raum der rasch abfallenden, unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf $(-\infty, \infty)$. Es sei auf \mathcal{S} die *Fouriertransformation* erklärt durch

$$(10) \quad \mathcal{F}(f)(v) \equiv \hat{f}(v) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp -ivx \, dx$$

Damit definieren wir für $1 \leq p \leq \infty$, $\sigma > 0$

$$(11) \quad \mathcal{B}_{p,\sigma} := \left\{ g \in L_p(-\infty, \infty) : \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \hat{\varphi}(x) \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{S} \text{ mit } \varphi(x) = 0, |x| \leq \sigma \right\}$$

Wir bezeichnen $\mathcal{B}_{p,\sigma}$ als Menge der Funktionen in $L_p(-\infty, \infty)$ mit *Bandbreite* σ . Um die Motivation dafür zu erkennen betrachten wir den Fall $p = 2$ und benutzen folgende Hilfsmittel aus der *Fourieranalysis* (ausführliche Beweise findet man in jedem Buch über Fourieranalysis):

1. Der Raum \mathcal{S} ist dicht in $L_p(-\infty, \infty)$, $1 \leq p < \infty$.
2. Es gilt für $f, g \in L_2(-\infty, \infty)$ die *Plancherel-Formel*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) g(x) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \hat{g}(v) \, dv$$

3. Die Fouriertransformation ist auf \mathcal{S} wohl definiert und bildet \mathcal{S} auf ganz \mathcal{S} ab.
4. Die Umkehrtransformation der Fouriertransformation ist auf \mathcal{S} gegeben durch

$$(12) \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(v) \exp ivx \, dv$$

Aus Eigenschaft 3. folgt, dass das Integral in (11) für alle $1 \leq p \leq \infty$ existiert, also $\mathcal{B}_{p,\sigma}$ wohl definiert ist. Im Falle $p = 2$ ist die Plancherel-Formel anwendbar und liefert

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(x) \varphi(x) \, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{S} \text{ mit } \varphi(x) = 0 \text{ für } |x| \leq \sigma$$

Da \mathcal{S} nach Eigenschaft 1. dicht in $L_2(-\infty, \infty)$ liegt, kann man daraus schließen, dass

$$\mathcal{B}_{2,\sigma} = \{g \in L_2(-\infty, \infty) : |\hat{g}(v)| = 0 \text{ f.ü. , } |v| > \sigma\}$$

Dies gilt auch für $1 \leq p < 2$, denn die Plancherel-Formel gilt auch dann noch. Da physikalisch gesehen die Fouriertransformation zu einem „Zeitsignal“ (mit Variable x) seine Darstellung im „Frequenzbereich“ (mit Variable v) liefert, bedeutet dies, dass Elemente von $\mathcal{B}_{p,\sigma}$ ihren *Frequenzbereich* in $(-\sigma, \sigma)$ haben. Man spricht dann von der (Frequenz)-Bandbreite σ . Im Falle $p > 2$ ist diese Interpretation nur im „distributionentheoretischen“ Sinne gültig, da die Fouriertransformation dann statt auf \mathcal{S} nur noch in diesem Sinne definiert werden kann. Die obige Definition des Raumes $\mathcal{B}_{p,\sigma}$ berücksichtigt dies bereits. Daher besteht auch dann eine bemerkenswerte Verbindung zu den trigonometrischen Polynomen:

Lemma 1.1 Die Menge der 2π -periodischen Funktionen in $\mathcal{B}_{p,\sigma}$ ist gleich der Menge der trigonometrischen Polynome vom Grad $\leq [\sigma] \equiv$ größte ganze Zahl $\leq \sigma$.

BEWEIS: Man kann mit Hilfe der Umkehrformel (12) verhältnismäßig leicht zeigen, dass $f \in \mathcal{B}_{p,\sigma}$ stetig ist. Ist f außerdem 2π -periodisch, so gilt für $\varphi \in \mathcal{S}$ aufgrund von Eigenschaft 3.

$$(13) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\widehat{\varphi}(x) dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} f(x)\widehat{\varphi}(x+2\pi k) dx = \int_0^{2\pi} f(x)\psi(x) dx,$$

wobei $\psi(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(x+2\pi k)$ stetige und 2π -periodisch ist. Für sie gilt

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}[j] &:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x)e^{-ijx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(x+2\pi k) e^{-ij(x+2\pi k)} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(x) e^{-ijx} dx = \varphi(-j)/\sqrt{2\pi} \end{aligned}$$

wobei wir zuletzt die Umkehrformel (12) der Fouriertransformation benutzt haben.

Mit dem aus der Theorie der Fourierreihen bekannten Satz, dass die gleichmäßig konvergente Fourierreihe einer Funktion (hier ψ) die Funktion selbst darstellt erhalten wir

$$\psi(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi(-j)e^{-ijx} = \sum_{|j|>\sigma} \varphi(-j)e^{-ijx}, \quad \text{wenn } \varphi(x) = 0 \text{ für } |x| \leq \sigma.$$

Nach Einsetzen in (13) erhalten wir, da Summe und Integral vertauschbar sind, lt. Definition von $f \in \mathcal{B}_{p,\sigma}$

$$(14) \quad 0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\widehat{\varphi}(x) dx = \sum_{|j|>\sigma} \varphi(-j)\widehat{f}[j], \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

Daraus folgt sofort $\widehat{f}[j] = 0$ für $|j| > \sigma$ und damit aus der Theorie der Fourierreihen, dass f ein trigonometrisches Polynom vom Grad $\leq [\sigma]$ ist. Umgekehrt folgt aber mittels (14), dass ein trigonometrisches Polynom f von diesem Grad in $\mathcal{B}_{p,\sigma}$ liegen muss. \square

Zu erwähnen ist noch eine äquivalente Charakterisierung des Raumes $\mathcal{B}_{p,\sigma}$ als Raum der Funktionen vom *exponentiellen Typ σ in $L_p(\mathbb{R})$* . Dies sind diejenigen Funktionen f in $L_p(\mathbb{R})$, die eine analytische Fortsetzung in der ganzen komplexen Ebene haben, für die die Wachstumsbedingung

$$(15) \quad |f(z)| \leq C \exp \sigma |\operatorname{Im} z|, \quad z \in \mathcal{C}$$

gilt (Der Beweis ist ziemlich tiefgehend, s. „W.Rudin Analysis 1973“, Kapitel 7).

1.6 Translationsinvariante Räume und Wavelets

Ein Grundgedanke der Approximationstheorie besteht darin, einen gegebenen Banach-Raum X bzw. seine Elemente durch eine **Skala von Unterräumen** zu approximieren. Eine Multi-Resolution-Analysis (MRA) ist eine spezielle solche Skala mit folgenden Eigenschaften:

$$(A1) \quad V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n \subset X$$

$$(A2) \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j \text{ liegt dicht in } X.$$

(A3) V_0 ist ein Unterraum von $X = L_2(\mathbb{R}^d)$, der durch Translate einer Funktion $\phi \in C(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d)$ erzeugt wird in dem Sinne, daß für jedes $f \in V_0$ im Sinne der L_2 -Norm gilt

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k \phi_{0,k}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k \phi(x - k)$$

mit $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ in $l_2(\mathbb{Z}^d)$, d.h. $\sum |a_k|^2 < \infty$.

(A4) Die Translate $\{\phi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ bilden eine **Riesz-Basis**, d. h. es besteht eine stetige lineare und bijektive Abbildung von V_0 auf $l_2(\mathbb{Z}^d)$, d.h. sie ist l_2 -stabil.

(A5) $f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1}$.

Diese Axiome wurden 1989 von S. Mallat aufgestellt, um einen Rahmen für die Konstruktion von Wavelets zu geben.

Die Axiome (A1) und (A2) besagen, daß die Unterräume V_j *hierarchisch angeordnet* sind und Element von X durch Folgen aus den V_j beliebig gut approximiert werden kann. Die Wichtigkeit dieser Eigenschaften wurde schon unter (4) betont.

Die Axiome (A3) und (A4) bilden die Grundlage der "Theorie der translationsinvarianten Räume". A3 impliziert nämlich, daß mit $f(x) \in V_0$ auch jedes $f(x + \alpha)$ in V_0 für $\alpha \in \mathbb{Z}^d$ liegt. Es gibt zahlreiche Beispiele von solchen Approximationssystemen: *Sinc-Funktionen*, Spline-Funktionen (= *Cardinal Splines*), Radial-Basis functions.

Die eigentliche Wavelet-Theorie beginnt mit **Axiom(A5)**. Man möchte eine erzeugende Funktion ϕ für den Raum V_0 finden, d.h. im Falle $d = 1$ soll jedes $f \in V_0$ als Linearkombination von ganzzahligen Translaten von ϕ dargestellt werden können. **Axiom(A5)** zeigt dann zusammen mit **Axiom(A1)**, dass es eine Folge $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l_2(\mathbb{Z})$ gibt mit

$$(16) \quad \phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2x - k), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Diese Gleichung wird **Verfeinerungsgleichung** oder **Skalierungs-Gleichung** für ϕ genannt. Sie liefert eine Funktionalgleichung für $\phi(x)$ und damit den Weg zur Konstruktion: man startet mit gegebenen Koeffizienten $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$, der sogenannten *Maske* und zeigt die Existenz einer Lösung ϕ von (43). Die Erzeugenden der Skala der Räume V_j ergeben sich dann direkt durch die Dilatationsskala $\{2^{-j}\}_{j=0}^{\infty}$ nach Axiom A5.

Die zu den Wavelets führende Idee besteht darin, die Maske so zu wählen, dass die Basis für V_0 aus Translaten von ϕ orthogonal ist und ferner Basen für V_j mit Hilfe einer Orthogonal-Zerlegung zu einer solchen in V_{j+1} *ergänzen*. Diese Idee wird präzisiert durch die Zerlegung

$$(17) \quad V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad W_j \perp V_j, \quad j = 0, 1, \dots$$

wobei W_j das orthogonale Komplement in V_{j+1} von V_j ist. Man kann sich überlegen, dass W_j wie in Axiom A5 durch j -fache Dilation aus dem Raum W_0 hervorgeht, der analog zu V_0 eine Erzeugende ψ besitzt. Diese Funktion $\in L_2(\mathbb{R})$ heisst dann **Wavelet** und genügt ebenfalls einer Skalierungsgleichung wie ϕ in (43). Ihre Translate sind paarweise zueinander orthogonal sowohl in Bezug auf die Translation als auch die Dilatation. Dies liefert sehr effektive (Zerlegungs- und Rekonstruktions) Algorithmen für die sogenannte *Wavelet-Transformation*, die bei der Anwendung in der Signal- und Bildverarbeitung der klassischen Methode der *schnellen diskreten Fourier-Transformation* mittlerweile den Rang abgelassen hat. Ein weiterer Grund dafür ist,

dass man Wavelets mit denselben vorteilhaften lokalen Eigenschaften wie Splinefunktionen konstruieren kann. Dies geschieht durch Abschwächung der Orthogonalität (44) durch Biorthogonalität zu einer zweiten *dualen MRA*. Es gibt sehr viel Literatur dazu, z.B. die umfangreiche Übersichtsarbeit von A.Cohen in "Handbook of Numerical Analysis" (P.G. Ciarlet-J.l.Lions Eds., Elsevier 2000, 417-711).

1.7 Multivariate Approximationssysteme

Zu allen bisher betrachteten Approximationstypen bzw. Approximationssystemen gibt es multivariate Analoga. Die einfachste Möglichkeit, sie zu konstruieren, bieten *Tensorprodukte dieser Approximationssysteme*. Das sind Räume von Funktionen mehrerer Variablen, die bei Restriktion auf jeweils eine Variable Elemente aus einem der in 1-6 auftretenden Räume sind. Konkret seien lineare Teilräume $M^{(i)}, i = 1, \dots, d$ von $X = C[a, b]$ mit Basen $\{g_j^{(i)}\}_{j=1}^{n_i}$ gegeben. Dann definiere z.B. für $d = 2$

$$(18) \quad M^{(1)} \otimes M^{(2)} := \{g \in C([a, b]^2) : g(x_1, x_2) := \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} a_{i_1}^{(1)} g_{i_1}^{(1)}(x_1) a_{i_2}^{(2)} g_{i_2}^{(2)}(x_2),$$

wobei $a_{i_j}^{(j)} \in \mathbb{R}$. Analog kann man Tensorprodukträume $M^{(1)} \otimes \dots \otimes M^{(d)}$ der Dimension d definieren. Für viele Zwecke ist diese Approximation durch Tensorprodukträume jedoch nicht flexibel genug. Jedoch kann bei der Approximation durch Polynome in mehreren Variablen der „Grad“ in verschiedener Weise definiert werden. Bei Gebieten von der Form von Simplexes (Dreiecke im Fall des \mathbb{R}^2) sind Tensorprodukte von Polynomräumen ungeeignet, man arbeitet dann besser mit Polynomen von einem festen „totalen Grad“, das sind Funktionen der Form

$$(19) \quad \Pi_k(\mathbb{R}^d) = \{g \in C([a, b]^d) : g(x_1, \dots, x_d) := \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha x^\alpha, \quad a_\alpha \in \mathbb{R} \},$$

wobei wir die sogenannte Multiindexschreibweise ($\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$) benutzen:

$$a_\alpha := a_{\alpha_1, \dots, \alpha_d}, \quad |\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_d, \quad x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$$

Bei Approximation auf der Kugeloberfläche oder allgemeiner auf der Einheitssphäre des \mathbb{R}^d arbeitet man mit sphärischen Polynomen (siehe dazu M. Reimer "Constructive Theory of Multivariate Functions", Mannheim 1990).

Wir können im Rahmen dieser Vorlesung ebenso wenig darauf eingehen wie auf die Verallgemeinerung der Spline-Räume in Abschnitt 1.4 auf mehrere Variable. Neben der seit langem existierenden *Theorie der Finiten Elemente* (siehe z. B. „The Finite Element Method for Elliptic Problems“ von P. G. Ciarlet 1978) wären hier noch die neueren Entwicklungen der multivariaten Spline-Theorie zu nennen, wie *simpliciale Splines*, *Box-Splines* und „*radial basis functions*“.

Damit sind kurz die wichtigsten Zweige der linearen multivariaten Approximationstheorie angesprochen. Eine *qualitative* Theorie der besten Approximation existiert dort aber (wie später verständlich werden wird) bis auf den Hilbertraumfall nur in Ansätzen, z.B. bei der besten Approximation durch harmonische Funktionen im L_∞ - und L_1 - Fall.

Als nächster Approximationstyp ist zu erwähnen die

1.8 Approximation durch konvexe Teilmengen

Hierunter fällt vor allem die Approximation mit linearen Teilräumen $M \equiv \text{Span}\{\varphi_i\}_{i=1}^n$, deren Elemente Nebenbedingungen erfüllen sollen. Beispiele sind

1. $M^0 := \{\varphi \in M : \varphi = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i, a_i \geq 0\}$
2. $M \cap C_p, \quad C_p := \{\varphi(x) : \varphi \in L_{1,loc}(\mathbb{R}), \varphi(x) \geq 0\}$
3. $M \cap C_m, \quad C_m := \{\varphi(x) : \varphi \in L_{1,loc}(\mathbb{R}), \varphi \text{ monoton wachsend}\}$

Analog definiert man die Approximation durch monoton fallende Funktionen.

4. $M \cap C_c, \quad C_c := \{\varphi(x) : \varphi \in L_{1,loc}(\mathbb{R}), \varphi \text{ konvex}\}$

Analog wird die Approximation durch konkave Funktionen definiert.

5. Einseitige Approximation: $f \in L_1(a, b)$ wird approximiert durch

$$M_f := \{\varphi \in M \cap L_1(a, b) : \varphi(x) \leq f(x) \text{ f.ü. in } (a, b)\}$$

Analog definiert man einseitige Approximation von oben.

Andere Approximationstypen mit Nebenbedingungen sind co-monotone Approximationen (Monotonieverhalten wie die zu approximierende Funktion) oder auch etwas ausgefallener wie die Approximation mit ganzzahligen Koeffizienten (analog zu 1).

Zum Schluss führen wir die wichtigsten Beispiele für die Approximation mit echten (d. h. nicht konvexen) nichtlinearen Teilmengen auf.

1.9 Approximation mit (verallgemeinerten) rationalen Funktionen

Es seien $\vec{\varphi} \equiv \{\varphi_i\}_{i=1}^m, \vec{\psi} \equiv \{\psi_j\}_{j=1}^n$ Systeme von linear unabhängigen und reellwertigen Funktionen auf einem Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Dann definiert man

$$(20) \quad \mathcal{R}_{m,n}(\vec{\varphi}, \vec{\psi}) := \left\{ \frac{\sum_{i=1}^m a_i \varphi_i(x)}{\sum_{j=1}^n b_j \psi_j(x)} : a_i, b_j \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^n b_j \psi_j(x) > 0 \right\}$$

Im Fall, dass $\text{Span}\{\varphi_i\} = \Pi_m$ und $\text{Span}\{\psi_j\} = \Pi_n$ gilt, liegen die gewöhnlichen rationalen Funktionen vor. Ein anderes Beispiel bildet der Fall $\text{Span}\{\varphi_i\} = \Pi_m^*, \text{Span}\{\psi_j\} = \Pi_n^*$ mit den trigonometrischen Polynomen aus 1.2.

1.10 Approximation mit Exponentialsummen (variable Frequenzen)

Für $N \in \mathbb{N}$ fest definiere als Spezialfall von Abschnitt 3

$$(21) \quad \mathcal{E}^0(\vec{\lambda}) := \left\{ g(x) : g(x) = \sum_{j=1}^N a_j \exp \lambda_j x, a_j, \lambda_j \in \mathbb{R}, \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N \right\}$$

Gegenüber 1.3 fassen wir jetzt die Frequenzen λ_j als zusätzliche nichtlineare Parameter auf. Für Approximationszwecke betrachtet man dann die *abgeschlossenen* Mengen

$$(22) \quad \mathcal{E}_N := \bigcup \left\{ \mathcal{E}(\vec{\lambda}, \vec{r}) : \sum_{j=1}^{\rho} (1 + r_j) \leq N \right\}$$

wobei $r_j = \text{grad} p_j$ den Grad der dort auftretenden Polynome p_j bezeichnet.

1.11 Approximation mit Spline-Funktionen (variable Knoten)

Mit den in Abschnitt 1.4 eingeführten Räumen $\mathcal{S}(k, \Delta, Z)$ definieren wir

$$(23) \quad \mathcal{S}(k, N) := \bigcup \left\{ \mathcal{S} : \#\Delta \equiv \sum_{i=1}^n z_i \leq N \right\}$$

Hier ist also im Gegensatz zu Abschnitt 1.4 die Zerlegung Δ nicht fest vorgegeben, sondern nur die Anzahl ihrer Knoten (einschließlich Vielfachheit).

Allgemeiner kann man (nach Hobby-Rice 1967) sogenannte γ -Polynome betrachten, die die Beispiele in den Abschnitten 1.10,1.11 umfassen, sowie die Approximation mit rationalen Funktionen. Weitere Beispiele für Approximation mit nichtlinearen Teilmengen sind die Approximation mit *Summen von Gauß-Kernen* $\exp \lambda(x - \beta)^2$ mit den nichtlinearen Parametern λ, α im Kern und stückweisen polynomialen Funktionen mit *variablen Knoten und Graden* (dies führt zur sogenannten h-p Finite-Element-Methode).

Diese Übersicht ist noch nicht vollständig, da einige moderne Entwicklungen fehlen, wie z.B. die Approximation von Kurven und Flächen mit *parametrisierten Splines*. Interessant ist auch die mathematische Theorie der neuronalen Netze, wo in Ansatzfunktionen, z.B. den sogenannten *sigmoidal functions* $f_n(x) = \sum_{i=1}^n c_k \phi(a_k \cdot x + b_k) + c_0$ die Parameter $a_k \in \mathbb{R}^d$ und c_k, b_k adaptiv ermittelt werden. Hier besteht eine Verbindung zu dem Gebiet der *hochdimensionalen Approximation*, das durch die Entwicklung leistungsfähigerer Rechner aktuell geworden ist.

Zur Abrundung der Theorie der besten Approximation sind noch folgende allgemeine Bemerkungen von Bedeutung:

Eine ausgezeichnete Rolle spielt die beste Approximation in *Hilbert-Räumen* durch lineare Unterräume M , die durch die sogenannte *Orthogonalprojektion* beschrieben wird. Daher ist sie dort linear in f und deshalb besonders einfach zu berechnen.

Einen wichtigen theoretischen Aspekt behandelt die Theorie der *Kolmogoroff-Durchmesser* und der damit verwandten *Approximationszahlen*. Statt bester Approximation zu einem $f \in X$ aus einem gegebenen linearen Approximationsraum M wird hier weitergehend nach einem Approximationsraum gefragt, der bezüglich einer kompakten Teilmenge von X optimale Approximationsgüte liefert. Eine ausführliche Darstellung dieses interessanten Gebietes findet man in dem Buch von A.Pinkus(1986). In dem Überblick von Tichomirov (1980) wird von diesem Standpunkt aus die ganze Approximationstheorie betrachtet. Der Schwerpunkt liegt dabei auf Ergebnissen quantitativer Art, darunter den schon erwähnten Sätzen von Jackson und Bernstein.

Ein verwandtes Gebiet bildet die Theorie des „Optimal Recovery“ wo nach optimalen Approximationsprozeduren mit vorgegebener „Information“ gefragt wird (s. C.A. Micchelli/T.Rivlin 1977).

2 Beste Approximation im (Prä) Hilbertraum

Besonders einfach ist die Theorie der besten Approximation in (Pra)Hilberträumen. Ein grundlegender Satz lautet

Satz 2.1 a) *Es sei M eine konvexe Teilmenge eines Prähilbertraums (über C) mit dem Skalarprodukt (x, y) für $x, y \in X$. Dann ist g^* beste Approximation zu $f \in X$ aus M genau dann wenn*

$$(24) \quad \operatorname{Re}(f - g^*, g^* - g) \leq 0 \quad , \forall g \in M.$$

b) *Ist M ausserdem abgeschlossen, so gibt es genau ein Element bester Approximation.*

c) *Ist M ein abgeschlossener linearer Teilraum eines Prähilbertraumes X , so existiert zu jedem $f \in X$ genau ein Element $g^* = P_M f$ bester Approximation zu f . Es gilt*

$$(25) \quad (f - P_M f, g) = 0 \quad , \forall g \in M.$$

Der Operator P_M der metrischen Projektion (vergl. Einleitung) ist hier ein linearer Projektor von X auf M mit Norm 1 und heisst **Orthogonalprojektion von X auf M** .

Es gibt Veranschaulichungen der besten Approximation aus konvexen Mengen im Hilbert-Raum, die den Begriff der Orthogonalprojektion erweitern. Sie benutzen die Begriffe **Kegel** bzw. **dualer Kegel**, siehe z.B. den Artikel von Chui-Deutsch-Ward (Constructive Approximation 6 (1990).

Im Fall endlich-dimensionaler M kann die beste Approximation konkret durch ein lineares Gleichungssystem berechnet werden.

Korollar 2.1 *Es sei $M = \operatorname{span} \{\phi_i\}_{i=1}^n$ mit $\phi_i \in X =$ ein Prähilbertraum. Die beste Approximation $P_M f$ zu einem $f \in X$ hat die Darstellung $P_M(f) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(f) \phi_i$, wobei die Koeffizienten $\lambda_i \equiv \lambda_i(f)$ Lösung des **Gramschen Gleichungssystems** sind*

$$(26) \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i(\phi_i, \phi_j) = (f, \phi_j) \quad , 1 \leq j \leq n.$$

Die zugehörige **Gramsche Matrix** hermitesch und positiv definit, falls die $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ ein linear unabhängiges System bilden. Darüber hinaus gilt die **Gramsche Formel**

$$(27) \quad \|f - P_M(f)\|^2 = G(\phi_1, \dots, \phi_n, f) / G(\phi_1, \dots, \phi_n).$$

Hierbei ist $G(\phi_1, \dots, \phi_n)$ als Matrix $(\phi_j, \phi_n)_{i,j=1}^n$ erklärt und $G(\phi_1, \dots, \phi_n, f)$ entsprechend.

Ein besonders einfacher Spezialfall dieses Korollars ergibt sich, wenn die Basis $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ für M als orthonormiert angenommen wird, d.h. $(\phi_i, \phi_j) = \delta_{i,j}$ für $1 \leq i, j \leq n$. Dann ist die Gramsche Matrix die Identität, und es gilt $\lambda_i = (f, \phi_i)$, also

Korollar 2.2 *Besitzt M die obige orthonormierte Basis, so ist die beste Approximation $P_M(f)$ gegeben durch*

$$(28) \quad P_M(f) = \sum_{i=1}^n (f, \phi_i) \phi_i, \quad \text{mit } (f, \phi_i) = \textit{i-ter Fourier-Koeffizient}$$

Man kann diesen Fall auch für unendlich-dimensionale Räume M betrachten. Zur genauen Formulierung benötigt man

Definition 2.1 Es sei M ein Unterraum eines Prähilbertraums X . Eine Folge $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ von orthonormierten Vektoren in M heißt **vollständig** (bzw. vollständige orthonormale Basis für M), falls für jedes $g \in M$ aus $(g, \phi_i) = 0$ für alle ϕ_i folgt $g = 0$.

Korollar 2.3 Unter den Voraussetzungen von Definition 1.8 gilt die **Parseval-Identität**

$$(29) \quad \|g\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(g, \phi_i)|^2, \quad \forall g \in M \subset X.$$

und für die beste Approximation $g^* \in M$ zu $f \in X$

$$(30) \quad g^* = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \phi_i) \phi_i, \quad \|f - g^*\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{\infty} |(f, \phi_i)|^2,$$

wobei die Konvergenz der Reihe in der Hilbertraum-Norm von X zu verstehen ist.

2.1 Lineare Ausgleichsrechnung

Das Standard-Problem der linearen Ausgleichsrechnung lautet: Gegeben seien die Daten $y_k \equiv f(x_k), 1 \leq k \leq n$, einer stetigen Funktion $f \in C[a, b]$ mit Stützstellen x_1, \dots, x_n in $[a, b]$ und gegeben m (linear unabhängige) Ansatzfunktionen $\phi_1(x), \dots, \phi_m(x) \in C[a, b]$, wobei $m \leq n$ sei (i.a. liegt sogar $m \ll n$ vor). Dann finde man Parameter $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^* \in \mathbb{R}$ derart, daß mit $w_k > 0$

$$\sum_{k=1}^n w_k [f(x_k) - \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \phi_i(x_k)]^2 \stackrel{!}{=} \min_{\lambda_1, \dots, \lambda_m} \sum_{k=1}^n w_k [f(x_k) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \phi_i(x_k)]^2$$

gilt. Diese Aufgabe geht in das Problem der besten Approximation über

$$(31) \quad \|f - \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \phi_i\|_{2,w} \stackrel{!}{=} \min_{\lambda_1, \dots, \lambda_m} \|f - \sum_{i=1}^m \lambda_i \phi_i\|_{2,w}$$

wobei das diskrete Skalarprodukt $(f, g)_w := \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) g(x_k)$ für $f, g \in C[a, b]$ mit entsprechender Seminorm $\|f\|_{2,w} := \sqrt{(f, f)_w}$ definiert wurde (die $w_k > 0$ werden als *Gewichte* bezeichnet).

Im \mathbb{R}^n betrachtet man statt Funktionen jetzt Vektoren $\vec{f}, \vec{a}_i \in \mathbb{R}^n$

$$(32) \quad \vec{f} := \{\sqrt{w_k} f(x_k)\}_k^n = 1 \quad \vec{a}_i = \{\sqrt{w_k} \phi_i(x_k)\}_k^n$$

geht dies in ein Approximationsproblem im \mathbb{R}^n über, das als approximative Lösung eines überbestimmten Gleichungssystems für den Vektor $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ geschrieben werden kann, nämlich als

$$(33) \quad \|\vec{f} - A\vec{\lambda}\|_2 = \min, \quad A = (n \times m) = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m)$$

Diese Sicht ist in der Numerischen Mathematik vorherrschend (eine schöne Darstellung findet man in Stoer *Einführung in die Numerische Mathematik*, Kapitel 4.8).

In konkreten Fällen kann es von Nutzen sein, das Problem als Spezialfall von Korollar 2.1 für geeignete f und ϕ_i anzusehen. Es folgt also

$$(34) \quad \sum_{i=1}^m G_{ji} \lambda_i = \langle \vec{f}, \vec{a}_j \rangle_2, \quad \langle, \rangle_2 = \text{Skalarprodukt im } \mathbb{R}^n,$$

wobei $G_{ji} = \langle \vec{a}_j, \vec{a}_i \rangle_2 = (A^*A)_{ji}$ mittels der Transponierten A^* der Matrix A gilt und die Lösung durch die sogenannten *Normalgleichungen* erhalten werden kann:

$$(35) \quad A^*A\vec{\lambda} = A^*\vec{f}, \quad \vec{f} \in \mathbb{R}^n, A^* = (m \times n).$$

In der Schreibweise des ursprünglichen Approximationsproblems lesen sich diese Formeln als

$$(36) \quad \sum_{i=1}^m G_{ij} \lambda_j = (f, \phi_i)_w, \quad 1 \leq i \leq m \quad G_{ij} = (\phi_i, \phi_j)_w = \sum_{k=1}^n w_k \phi_i(x_k) \phi_j(x_k).$$

Eine Möglichkeit zur Lösung der Normalgleichungen ist die Householder-Transformation (Näheres s. Stoer, loc. cit. Kapitel 4.7), mit der A in ein Produkt $A = P \cdot R$ transformiert wird, wobei R eine obere $n \times m$ Dreiecksmatrix und $P = n \times n$ eine unitäre Matrix ist. Als Konsequenz kann man mit $y = R\vec{\lambda}$ für das Ausgleichsproblem schreiben

$$\min_{\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^m} \|\vec{f} - A\vec{\lambda}\|_2 = \min_{\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^m} \|\vec{f} - PR\vec{\lambda}\|_2 = \min_{\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^m} \|\vec{f} - P\vec{\lambda}\|_2,$$

so dass die Lösung durch folgende Prozedur erhalten werden kann:

1. Zerlege A in $A = PR$, wo P unitär und R nichtsinguläre obere Δ -Matrix $n \times m$
2. Löse das Gleichungssystem $\vec{f} = R\vec{\lambda}$ in \mathbb{R}^m .

Bei der *Ausgleichsrechnung mit Polynomen* geht man von Ansatzfunktion $\{\phi_i\}_{i=1}^m$ mit $\phi_m(x) := x^{i-1}$ aus. Hier sind orthonormierte Polynome bezüglich eines Skalarprodukts besonders einfach mit Hilfe von Rekursionsformeln zu konstruieren.

Lemma 2.1 *Zu dem Skalarprodukt $(f, g)_w$ wie oben lässt sich eine Folge von **orthogonalen Polynomen** q_k vom Grad k (mit höchstem Koeffizient 1) durch folgende Rekursionsformeln konstruieren*

$$(37) \quad \begin{aligned} q_0(x) &= 1, & q_1(x) &= x - a_1 \\ q_k(x) &= (x - a_k)q_{k-1}(x) - b_k q_{k-2}(x) & , k &\geq 2 \end{aligned}$$

mit $a_k = (xq_{k-1}(x), q_{k-1}(x))_w / (q_{k-1}(x), q_{k-1}(x))_w$, $b_k = (xq_{k-1}(x), q_{k-2}(x))_w / (q_{k-2}, q_{k-2})_w$.

Da die Polynome $q_j(x) / \|q_j\|_{2,w}$ orthonormiert im Sinne des Skalarprodukts (2.6), sind, ist die Lösung des Ausgleichproblems

$$\|\phi_m^* - f\|_{2,w} = \text{dist}(f, P_m)_{2,w}$$

gegeben durch

$$\phi_m^* \equiv \phi_m^*(f; x) = \sum_{k=0}^m \frac{(q_k f)_w}{(q_k, q_k)_w} q_k(x).$$

Der Aufwand ist mit für kleine m mit dem Aufwand $n \cdot m^2$ des Householder-Verfahrens vergleichbar.

Es sei bemerkt, daß das Lemma für beliebige Skalarprodukte gilt. Im Falle des Skalarproduktes mit kontinuierlicher Gewichtsfunktion $w(x) > 0$ aus $L_1(-1, 1)$ liefert es

$$\langle f, g \rangle_w := \int_{-1}^1 w(x) f(x) g(x) dx \quad f(x), g(x) \in C[-1, 1]$$

die klassischen 3-Punkt-Rekursionsformeln aus der Theorie der orthogonalen Polynome. Im Spezialfall der Jacobischen Polynome $P_n^{(\alpha, \beta)}$, die der Orthogonalrelation

$$\int_{-1}^1 P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx = 0 \quad \alpha, \beta > -1$$

genügen, berechnet man sie am besten durch die sogenannte *Rodrigues-Relation*

$$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta}]$$

Für $\alpha = \beta = 0$ bzw. $\alpha = \beta = 1/2$ sind dies die Legendre- bzw. Tschebyscheff-Polynome. Mehr orthogonale Polynome findet man z.B. im Buch G. Freud "Orthogonale Polynome" (1969). Eine umfangreiche Literatur gibt es auch über orthogonale Polynome in mehreren Variablen.

2.2 Ausgleich mit trigonometrischen Polynomen

In komplexer Schreibweise (s. Einleitung) hat ein trigonometrisches Polynom vom Grad m die Darstellung $t_m(x) = \sum_{k=-m}^m c_k e^{ikx}$ mit komplexen Koeffizienten c_k .

Es wird reellwertig genau dann wenn $c_{-k} = \bar{c}_k$ gilt (insbesondere c_0 reell). Schreibt man $c_k \equiv a_k - ib_k$, so geht es über in

$$(38) \quad t_m(x) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^m (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

mit reellen Koeffizienten a_k, b_k . Einfacher rechnet man aber mit der komplexen Darstellung und Basisfunktionen $\{e^{ikx}\}_{k=-m}^m$. Die Besonderheit gegenüber algebraischen Polynomen besteht nun darin, daß nicht nur die Orthogonalitätsrelation $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{-ilx} dx = 2\pi \delta_{k,l}$ gilt, sondern dass diese Funktionen auch für bestimmte diskrete Skalarprodukte von (31) orthogonal sind.

Lemma 2.2 *Mit dem Skalarprodukt (auf der Menge $C^n =$ der Vektoren mit n komplexwertigen Komponenten bzw. der Menge der komplexwertigen, stetigen 2ϕ periodischen Funktionen)*

$$(39) \quad [f, g]_n \equiv \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \overline{g\left(\frac{2\pi k}{n}\right)}$$

sind die Funktionen $\phi_j(x) = e^{ijx}, 0 \leq j \leq n-1$, bzw. die Funktionen $\psi_j(x)$ mit $\psi_{2j}(x) = \cos jx, \psi_{2j-1}(x) = \sin jx$ paarweise orthonormiert bzw. es gilt $[\psi_j, \psi_j]_n = 1/2$.

BEWEIS: Durch einfache Rechnung sieht man für $l \neq j$

$$n[\phi_j, \phi_l]_n = \sum_{k=1}^n e^{2\pi k(j-l)/n} = \sum_{k=1}^n z^n = z(z^n - 1)/(1 - z) = 0$$

wenn $z = e^{2\pi(j-l)/n}$ gesetzt wird. Ferner gilt $n[\phi_j, \phi_j]_n = \sum_{k=1}^n 1 = n$. Durch Übergang zum Real- und Imaginärteil folgt daraus für $l \neq j$

$$0 = [\phi_j, \phi_l]_n \equiv [\cos jx, \cos lx]_n + [\sin jx, \sin lx]_n + i\{[\sin jx, \cos lx]_n - [\cos jx, \sin lx]_n\}$$

Addiert man hierzu die entsprechende Gleichung von $0 = [\phi_j, \phi_{-l}]_n$, so folgt hieraus $[\cos jx, \cos lx]_n = [\sin jx, \sin lx]_n = 0$ für $j \neq l$. Ferner folgt uns $n[\phi_j, \phi_j]_n = n$ durch Übergang zu Real- und Imaginärteil $[\cos jx, \sin jx]_n = 0$. Addiert man weiter $0 = [\phi_j, \phi_{-j}]_n$ mit Real- und Imaginärteil zu $[\phi_j, \phi_j]_n = 1$ so ergibt sich $1 = 2[\cos jx, \cos jx]_n$ und schließlich $[\sin jx, \sin jx]_n$, womit alle gewünschten Relationen gezeigt sind. \square

Satz 2.2 Gegeben $f \in C_{2\pi} =$ Menge der stetigen 2π - periodischen Funktionen so gibt es genau ein trigonometrisches Polynom m - ten Grades $t_m^*(f; x)$ der Form (38) das die Aufgabe ($n \geq 2m + 1$)

$$(40) \quad \begin{aligned} & \inf_{t_m} \sum_{k=1}^n \left| f\left(\frac{2\pi k}{n}\right) - t_m\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \right|^2 \equiv \inf_{t_m} [f - t_m, f - t_m]_n^2 \\ & = \sum_{k=1}^n \left| f\left(\frac{2\pi k}{n}\right) - t_m^*\left(f; \frac{2\pi k}{n}\right) \right|^2 \end{aligned}$$

Ist. Im Falle $b = 2m + 1$ ist $t_m^*(f; x)$ das eindeutig bestimmte trigonometrische Polynom vom Grad $m = [n/2]$, das f an den Stellen $2\pi k/n, 1 \leq k \leq n$, interpoliert. Allgemein hat das Ausgleichspolynom $t_m^*(f; x)$ die Form

$$(41) \quad t_m^*(f; x) = \sum_{k=-m}^m [f, e^{ikx}]_n e^{ikx}.$$

Ist f reellwertig, so gilt

$$(42) \quad t_m^*(f; x) = [f, 1]_n + 2 \sum_{k=1}^m \{ [f, \cos kx]_n \cos kx + [f, \sin kx]_n \sin kx \}$$

BEWEIS: Die Aussage von Korollar 2.2 gilt auch für die komplexwertigen Skalarprodukte (39) statt der reellen Skalarprodukte. Da die $e^{ikx}, -m \leq k \leq m$, nach Lemma 2.2 orthonormiert sind, folgt hieraus direkt die Darstellung in (41). Im Falle $n = 2m + 1$ sei $L_m(f; x) = \sum_{k=-m}^m c_k e^{ikx}$ das trigonometrische Interpolationspolynom vom Grad m , das f an den Stelle $2\pi k/(2m + 1)$ interpoliert (Existenz ist klar, da dies durch Auflösung eines linearen nichtsingulären Gleichungssystems geschieht). Bildung der Skalarprodukte mit e^{ijx} nach (39) liefert

$$[f, e^{ijx}]_n = [t_m(f), e^{ijx}]_n = \sum_{k=-m}^m c_k [e^{ikx} e^{ijx}]_n = c_j,$$

woraus nach (41) die Gleichheit $t_m^*(f; x) = L_m(f; x)$ folgt Ist f reellwertig, so gilt $[f, e^{ijx}]_n = [f, \cos jx]_n - i[f, \sin jx]_n$ und (42) folgt durch leichte Rechnung aus (41). \square

Bemerkung: Die numerische Berechnung von (2.17) läuft auf die schnelle und effektive Berechnung der diskreten Fourierkoeffizienten $[f, e^{ikx}]_n$ in t_m hinaus. Es gibt nun sehr effektive Algorithmen, die dies für alle sinnvollen $0 \leq k \leq n$ mit nur $\mathcal{O}(n \log n)$ Punktoperationen (statt der n^2 zu erwartenden). Eine Einführung in diese als *schnelle diskrete Fouriertransformation (FDFT)* bezeichneten Algorithmen gibt "Einführung in die Numerische Mathematik", Kapitel 2.3 von J. Stoer (loc.cit.).

2.3 Translationsinvariante Räume und Wavelets

Ein Grundgedanke der Approximationstheorie besteht darin, einen gegebenen Banach-Raum X bzw. seine Elemente durch eine **Skala von Unterräumen** zu approximieren. Eine Multi-Resolution-Analysis (MRA) ist eine spezielle solche Skala mit folgenden Eigenschaften:

$$(A1) \quad V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n \subset X$$

$$(A2) \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j \text{ liegt dicht in } X.$$

(A3) V_0 ist ein Unterraum von $X = L_2(\mathbb{R}^d)$, der durch Translate einer Funktion $\phi \in C(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d)$ erzeugt wird in dem Sinne, daß für jedes $f \in V_0$ im Sinne der L_2 -Norm gilt

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k \phi_{0,k}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k \phi(x - k)$$

mit $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ in $l_2(\mathbb{Z}^d)$, d.h. $\sum |a_k|^2 < \infty$.

(A4) Die Translate $\{\phi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ bilden eine **Riesz-Basis**, d. h. es besteht eine stetige lineare und bijektive Abbildung von V_0 auf $l_2(\mathbb{Z}^d)$, d.h. sie ist l_2 -stabil.

$$(A5) \quad f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1}.$$

Diese Axiome wurden 1989 von S. Mallat aufgestellt, um einen Rahmen für die Konstruktion von Wavelets zu geben.

Axiome (A1) und (A2) besagen, daß die Unterräume V_j *hierarchisch angeordnet* sind und Element von X durch Folgen aus den V_j beliebig gut approximiert werden kann. Die Wichtigkeit dieser Eigenschaften wurde schon früher betont.

Die Axiome (A3), (A4) liefern die Grundlage der **”Theorie der translationsinvarianten Räume”**. Es impliziert nämlich, daß mit $f(x) \in V_0$ auch jedes $f(x + \alpha)$ in V_0 für $\alpha \in \mathbb{Z}^d$ liegt. Zur Untersuchung der Approximationseigenschaften gibt es eine elegante Theorie auf der Basis der Fourier-Analyse, auf die später eingegangen wird.

Mit **Axiome(A4), (A5)** beginnt die eigentliche Wavelet-Theorie. Man möchte eine erzeugende Funktion ϕ für den Raum V_0 finden, d.h. im Falle $d = 1$ soll jedes $f \in V_0$ als Linearkombination von ganzzahligen Translaten von ϕ dargestellt werden können. Zusammen mit (A1) zeigt **Axiome(A5), (A1)**, dass es eine Folge $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l_2(\mathbb{Z})$ gibt mit

$$(43) \quad \phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2x - k), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Diese Gleichung wird **Verfeinerungsgleichung** oder **Skalierungs-Gleichung für ϕ** genannt. Sie liefert eine Funktionalgleichung für $\phi(x)$ und damit den Weg zur Konstruktion: man startet mit gegebenen Koeffizienten $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, der sogenannten *Maske* und zeigt die Existenz einer Lösung ϕ von(43). Die Erzeugenden der Skala der Räume V_j ergeben sich dann direkt durch die Dilatationsskala $\{2^{-j}\}_{j=0}^{\infty}$ nach Axiom A5.

Die zu den Wavelets führende Idee besteht darin, die Maske so zu wählen, dass die Basis für V_0 aus Translaten von ϕ orthogonal ist und ferner Basen für V_j mit Hilfe einer Orthogonal-Zerlegung zu einer solchen in V_{j+1} *ergänzen*. Diese Idee wird präzisiert durch die Zerlegung

$$(44) \quad V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad W_j \perp V_j, \quad j = 0, 1, \dots$$

wobei W_j das orthogonale Komplement in V_{j+1} von V_j ist. Man kann sich überlegen, dass W_j wie in Axiom A5 durch j -fache Dilation aus W_0 hervorgeht und letzterer Raum analog zu V_0 eine Erzeugende ψ besitzt. Diese Funktion $\in L_2(\mathbb{R})$ heisst dann **Wavelet** und genügt ebenfalls einer Skalierungsgleichung wie ϕ in (43). Das einfachste Beispiel liefert die Funktion $\phi(x) := \chi_{[0,1)}(x)$, für die $\psi(x) := \chi_{[0,1/2)}(x) - \chi_{[1/2,1)}(x)$ das zugehörige Wavelet ist. Definiert man allgemeiner für $k \in \mathbb{Z}, j = 0, 1, 2, \dots$

$$\varphi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\varphi(2^j x - k), \quad \psi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\psi(2^j x - k).$$

für $k \in \mathbb{Z}, j = 0, 1, 2, \dots$ so sind die Räume $V_j := \text{Span}\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ und $W_j := \text{Span}\{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ orthogonal zueinander und es gilt $V_j \oplus W_j = V_{j+1}$.

Allgemeiner sind die Translate der Wavelets paarweise zueinander orthogonal sowohl in Bezug auf die Translation als auch die Dilatation. Dies liefert sehr effektive (Zerlegungs- und Rekonstruktions) Algorithmen für die sogenannte *Wavelet-Transformation*, die bei der Anwendung in der Signal- und Bildverarbeitung der klassischen Methode der *schnellen diskreten Fourier-Transformation* mittlerweile den Rang abgelaufen hat. Ein weiterer Grund dafür ist, dass man Wavelets mit denselben vorteilhaften lokalen Eigenschaften wie Splinefunktionen konstruieren kann. Dies geschieht durch Abschwächung der Orthogonalität (44) durch Biorthogonalität zu einer zweiten *dualen MRA*. Es gibt sehr viel Literatur dazu, z.B. die umfangreiche Übersichtsarbeit von A.Cohen in "Handbook of Numerical Analysis" (P.G. Ciarlet-J.I.Lions Eds., Elsevier 2000, 417-711).

2.4 Näherungsweise Lösung von Operatorgleichungen

Gegeben sei eine Operatorgleichung $Lu = f$ mit einem linearen Operator L auf einem Hilbertraum X in einen Hilbertraum Y , und es sei bekannt, daß für $f \in Y$ diese Gleichung genau eine Lösung u^* in X hat. Für praktische bzw. numerische Zwecke wollen (und können) wir nur eine näherungsweise Lösung u_n^* in dem endlich-dimensionalen Unterraum $S_n = \text{span}\{\phi_i\}_{i=1}^n$ von X bestimmen. Das entsprechende Ersatzproblem lautet dann

$$\|Lu_n^* - f\|_Y = \min_{u \in S_n} \|f - Lu\|_Y = \inf\{\|f - g\|_Y : g \in L(S_n) \subset Y\}.$$

Falls L stetig ist, lässt sich die Lösung aus $Lu_n^* - f \perp L(S_n)$ bzw. aus der Normalengleichung $L^*Lu_n^* = L^*f$ bestimmen, wobei der adjungierte Operator L^* ist. Für die Lösung $u_n^* := \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i$ ergibt sich daraus das Gleichungssystem

$$(45) \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle L\phi_i, L\phi_j \rangle_Y = \langle f, L\phi_j \rangle_Y, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Wenn konkret Differentialgleichungen vorliegen, kann die Lösung durch die Normalengleichung zu kompliziert sein, z.B. bei dem *Sturm-Liouville Randwert-Problem*

$$(Ly)(x) := [p(x)y'(x)]' - q(x)y(x) = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = y(b) = 0,$$

mit Lösung $y(x) \in C^2[a, b]$ wird L^*L ein Differentialoperator 4-ter Ordnung. Daher ist es günstiger, die sogenannte "schwache Form" des Problems

$$(46) \quad a(y, v) = -(f, v)_2, \quad \forall v \in X := \{u(x) \in L^2(a, b) : u'(x) \in L^2(a, b), u(a) = u(b) = 0\}$$

mit $f \in L_2(a, b)$ und Testfunktionen $v(x) \in X$ zu betrachten, wobei zur Abkürzung

$$(f, v)_2 := \int_a^b f(x)v(x) dx, \quad a(y, v) := \int_a^b (p(x)y'(x)v(x)' + q(x)y(x)v(x))dx$$

bezeichnen. Zur Näherung werden statt (45) die sogenannten *Galerkin Gleichungen*

$$(47) \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i a(\phi_i, \phi_j) = -(f, \phi_j)_2, \quad 1 \leq j \leq n,$$

verwendet. Besonders einfache Verhältnisse liegen vor, wenn die Bilinearform $a(u, v)$ symmetrisch und positiv definit auf X ist (Dies ist z.B. der Fall, wenn die Galerkin Gleichungen aus einem Variationsproblem abgeleitet werden können). Dann gilt

Satz 2.3 *Ist die Bilinearform $a(u, v)$ symmetrisch und positiv definit auf X , so bildet sie ein Skalarprodukt auf X und $\|y\|_a := \sqrt{a(u, u)}$ eine Norm auf X und es gibt genau eine Lösung $y \in X$ von (46). Für die Näherung $u_n := \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i \in S_n \subset X$, die (47) erfüllt, gilt die Fehlerabschätzung*

$$\|y - u_n\|_a = \text{dist}(y, S_n)_a,$$

d.h. u_n ist beste Approximation zu $y \in X$ aus S_n im Sinne der Norm $\|\cdot\|_a$.

BEWEIS: Der erste Teil der Aussage folgt aus dem Satz von Lax- Milgram, der hier nicht bewiesen sei.

Zum zweiten Teil sei bemerkt, dass die Lösbarkeit der Gleichungen (47) daraus folgt, dass lt. Voraussetzung in (47) eine Gramsche Matrix vorliegt. Benützt man nun (46) nur für Elemente aus S_n und subtrahiert dies von (47), so folgt

$$a(y - u_n, v) = 0, \quad \forall v \in S_n.$$

Dies ist aber genau die Orthogonalitätsbedingung des Satzes 2.1 für $y \in X$ mit bester Approximation $u_n \in M = S_n$. □

Bemerkung: Symmetrie und positive Definitheit von $a(u, v)$ liegen vor, wenn die Galerkin Gleichungen aus einem Variationsproblem abgeleitet werden können. Man spricht dann von *Ritz-Galerkin Gleichungen*.

Als Ansatzfunktionen ϕ_i wählt man in den Ritz-Galerkin Gleichungen Splinefunktionen bzw. allgemeiner stückweise Polynome. Damit ist dann die Grundidee der sogenannten “Theorie der Finiten Elemente” skizziert. Bezüglich weiterer Information über dieses umfangreichen Gebiet der Numerischen Analysis sei z.B. auf das Buch “The Finite Element Method for Elliptic Problem” von P.G. Ciarlet 1978 verwiesen.

3 Weitere Aussagen zur Besten Approximation

3.1 Beste Approximation in linearen normierten Räumen

Im Folgenden geben wir nun die grundlegenden Sätze über Existenz und Eindeutigkeit der besten Approximation in linearen normierten Räumen (mit LNR bezeichnet) an. Beweise findet man z.B. in den Büchern von E.W. Cheney, J.R. Rice, D. Braess und in K. Scherer: Theorie der besten Approximation (Vorlesungsskript, Bonn 1992-2004).

Die zentralen Begriffe für dieses Kapitel sind zusammengefasst in

Definition 3.1 Eine Teilmenge M eines LNR X heißt E-Menge (Existenz-Menge), falls zu jedem $f \in X$ mindestens ein Element $g^* \in M$ bester Approximation existiert, d. h.

$$(48) \quad \|f - g^*\| = \text{dist}(f; M)_X \equiv \inf_{g \in M} \|f - g\|$$

Die Menge M heißt U-Menge (Eindeutigkeits-Menge), falls zu jedem $f \in X$ höchstens ein Element g^* bester Approximation existiert. Ferner heißt M eine T-Menge (Tschebyscheff-Menge), falls M eine E- und eine U-Menge ist.

Die allgemeine Theorie hat zum Ziel, unter geeigneten Zusatzannahmen an X "geometrischer Natur" die E-, U- und T-Mengen zu charakterisieren.

Ein notwendiges Kriterium für die Existenz gibt

Lemma 3.1 Jede E-Menge M in einem LNR X ist abgeschlossen.

Der Beweis folgt sofort durch Annahme der gegenteiligen Aussage.

Vor dem Versuch, die Existenz einer besten Approximation zu beweisen, kontrolliere man also die Abgeschlossenheit von M . Andernfalls ist es i.a. leicht möglich, ein Gegenbeispiel zu finden. Um dies zu vermeiden, sollte man zuerst den Abschluss von M bilden. Allerdings darf dieser Abschluss nicht zu groß werden und zu schwierig zu beschreibende Elemente enthalten.

Ein hinreichender Satz zur Existenz ist :

Satz 3.1 Eine Teilmenge M eines LNR X sei **beschränkt kompakt**, d.h. für jede Kugel $K(x; r) \equiv \{y \in X : \|x - y\| \leq r\}$ mit Zentrum $x \in X$ und Radius $r > 0$ ist der Durchschnitt $M \cap K(x; r)$ eine folgenkompakte Menge in X , d.h. jede Folge in $M \cap K(x; r)$ besitzt eine konvergente Teilfolge. Dann ist M eine E-Menge, insbesondere ist jeder endlich-dimensionale Teilraum M eine E-Menge.

Beweis: Es sei $\{g_n\}$ eine Minimalfolge, d.h. es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - g_n\| = \text{dist}(f; M)_X$. Man zeigt leicht, dass $\|g_n\| \leq 2 \text{dist}(f; M)_X$ für $n \geq n_0$, n_0 groß genug. Die Konvergenz (einer Teilfolge) gegen ein $g^* \in M \cap K(0; 2 \text{dist}(f; M))$ folgt dann nach Annahme und der erste Teil der Behauptung aus $\|f - g^*\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - g_n\| = \text{dist}(f; M)$.

Der zweite Teil folgt daraus, weil bekanntlich (Heine-Borel Satz) abgeschlossene und beschränkte Mengen in einem endlich-dimensionalen Raum M kompakt sind.

Die Voraussetzungen dieser Sätze genügen noch nicht, um die Eindeutigkeit der besten Approximation allgemein zu beweisen. Es gibt jedoch eine "geometrische" Eigenschaft der Norm von X , die dafür charakteristisch ist:

Definition 3.2 Ein LNR X und seine Norm heißen **strikt konvex**, falls für alle $f, g \in X$ mit $\|f\| = 1$, $\|g\| = 1$ und $f \neq g$ folgt $\|\lambda f + (1 - \lambda)g\| < 1$ für $\lambda \in (0, 1)$. Geometrisch bedeutet dies : die Oberfläche $S := \{f \in X : \|f\| = 1\}$ der Einheitskugel von X enthält keine Verbindungsstrecke zwischen je zwei Elementen f und g aus S . Ein LNR X heißt **uniform konvex**, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\epsilon) < 0$ existiert, so dass aus $\|x\| = \|y\| = 1$ und $\|(x + y)/2\| > 1 - \delta$ folgt $\|x - y\| < \epsilon$.

Bemerkung: Ist ein LNR X uniform konvex, so gilt $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta) = 0$ für den sogenannten *Konvexitätsmodul* $\omega(\delta) := \sup\{\|x - y\| : \|x\| = \|y\| = 1, \|(x + y)/2\| > 1 - \delta\}$, insbesondere ist X strikt konvex. Ist X endlich-dimensional, so fallen beide Eigenschaften zusammen.

Satz 3.2 (Existenz, Eindeutigkeit) Ein LNR X ist strikt konvex genau dann, wenn in jeder abgeschlossenen und konvexen Menge M höchstens ein Element bester Approximation zu jedem $f \in X$ existiert.

Beweis: Zeige nur die Hinlänglichkeit. Gäbe es ein $f \in X$ mit zwei verschiedenen besten Approximationen $g_1 \neq g_2$ in der abgeschlossenen und konvexen Menge M , so gilt $\|g - g_1\| = \|g - g_2\| = \text{dist}(f; M)$ und wir können $d > 0$ annehmen, da sonst $\|g_1 - g_2\| = 0$. Dann liegen die Elemente $x \equiv (f - g_1)/d, y \equiv (f - g_2)/d$ auf der Oberfläche der Einheitskugel und es gilt weiter wegen $(1 - \lambda)g_1 + \lambda g_2 \in M$

$$1 \leq \|[f - (1 - \lambda)g_1 - \lambda g_2]/d\| = \|(1 - \lambda)x + \lambda y\| \leq (1 - \lambda)\|x\| + \lambda\|y\| = 1$$

nach Definition von d . Es liegt also das Liniensegment $(1 - \lambda)x + \lambda y$ für $\lambda \in (0, 1)$ auf der Oberfläche der Einheitskugel, ein Widerspruch zur strikten Konvexität von X .

Satz 3.3 In einem uniform konvexen vollständigen LNR existiert in abgeschlossenen und konvexen Mengen M genau eine beste Approximation.

Beweis: Wir können $d = \inf\{\|f - g\| : g \in X\} > 0$ annehmen, denn andernfalls würde eine Folge $g_n \in M$ gegen $f \in X$ streben und wegen Abgeschlossenheit von M ist f selbst Element bester Approximation.

Also existiert eine Folge $h_n = f - g_n, g_n \in M$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n\| = d < 0$. Wir wählen $N = N(\delta)$ zu $\delta > 0$ so groß, dass

$$(49) \quad 1 \leq \|h_n/d\| \leq 1 + \delta \quad , n \geq N$$

Sei nun $n, m \geq N$ und $h'_n := \lambda_n h_n/d$ mit $\lambda_n := d/\|h_n\| \leq 1$ gesetzt. Dann folgt

$$\begin{aligned} d \|(h'_n + h'_m)/2\| &= \left\| \frac{h_n + h_m}{2} - \frac{(1 - \lambda_n)h_n}{2} - \frac{(1 - \lambda_m)h_m}{2} \right\| \\ &\geq \left\| \frac{h_n + h_m}{2} \right\| - \frac{(1 - \lambda_n)\|h_n\|}{2} - \frac{(1 - \lambda_m)\|h_m\|}{2}. \end{aligned}$$

Nun gilt wegen der Konvexität von M nach Definition von d

$$\|(h_n + h_m)/2\| = \|f - (g_n + g_m)/2\| \geq d$$

und folglich mit (49)

$$\begin{aligned} d \|(h'_n + h'_m)/2\| &\geq d - \left(\|h_n\| + \|h_m\| \right) / 2 + \left(\lambda_n \|h_n\| + \lambda_m \|h_m\| \right) / 2 \\ &\geq d - (1 + \delta)d + d = d(1 - \delta) \end{aligned}$$

Die Elemente h'_n erfüllen also $\|h'_n\| = 1$ und $\|(h'_n + h'_m)/2\| \geq 1 - \delta$. Daher muß $\|h'_n - h'_m\| \leq \epsilon$ gelten, wenn nur $\delta = \delta(\epsilon)$ (und damit oben $N = N(\epsilon)$) wie in der Definition der uniformen Konvexität gewählt wird. Also bildet $\{\lambda_n h_n\}$ eine Cauchy-Folge in X und ist konvergent, weil X vollständig ist. Da $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d/\|h_n\| = 1$ gilt, muß auch $\{h_n = f - g_n\}$ konvergieren. Somit existiert $g^* = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$, und man verifiziert leicht, dass g^* beste Approximation zu f aus K ist. Die Eindeutigkeit von g^* folgt aus Satz 3.2.

Wichtige Beispiele von strikt konvexen (und sogar uniform konvexen) Räumen sind die Lebesgue-Räume $L^p(\mu; G)$ im Falle $1 < p < \infty$. Dazu

Satz 3.4 (Clarkson) *Die Räume $L_p(\mu; G)$, $1 < p < \infty$, der reell-(komplex)wertigen und bezüglich des Lebesgue (Stieltjes) Maßes μ L_p -integrierbaren Funktionen auf einem offenen und beschränkten Gebiet G des \mathbb{R}^d sind uniform konvex.*

Der Beweis folgt direkt aus den sogenannten Clarkson-Ungleichungen (Beweis in R.A. Adams "Sobolev Spaces" oder vereinfacht in A.Schönhage "Approximationstheorie" 1971)

$$\begin{aligned} \|(f+g)/2\|_p^p + \|(f-g)/2\|_p^p &\leq (\|f\|_p^p + \|g\|_p^p)/2, & 2 \leq p < \infty, \\ \|(f+g)/2\|_p^{p'} + \|(f-g)/2\|_p^{p'} &\leq ((\|f\|_p^p + \|g\|_p^p)/2)^{p'-1}, & 1 \leq p \leq 2. \end{aligned}$$

Als nächstes betrachten wir Charakterisierungssätze für L_p -Räume.

Satz 3.5 (Charakterisierung) *Es sei M ein linearer Teilraum von $L_p(G)$.*

a) $g^* \in M$ ist beste Approximation zu $f \in L_p(G)$ im Falle $1 < p < \infty$ genau dann, wenn

$$\int |f - g^*|^{p-1} [\text{sign}(f - g^*)] h \, d\mu = 0 \quad , \forall h \in M$$

b) $g^* \in M$ ist beste Approximation zu $f \in L_1(G)$ (im L_1 -Sinne) genau dann wenn

$$\int_{G/Z} [\text{sign}(f - g^*)] h \, d\mu + \int_Z |h| \, d\mu = 0 \quad , \forall h \in M$$

gilt (Kripke-Rivlin, Trans. Amer. Math. Soc. 119 (1965)).

Aussage a) gibt Gleichungen für die zu bestimmenden Parameter α_i^* an, jedoch sind sie mit Ausnahme von $p = 2$ nichtlinear. Im Falle $p = 2$ aber ergibt sich ein Spezialfall des allgemeineren Satzes 2.1 in Hilbert-Räumen. In Aussage b) stört die Existenz einer Ausnahmemenge Z . Sie wird relativ einfach, wenn das Maß von Z gleich null ist, was z.B. bei der Approximation mit Tschebyscheff-Systemen (s. nächster Abschnitt) oder mit harmonischen Funktionen der Fall ist.

Beweis von Satz 3.5: Die Idee der Variationsrechnung ist es, statt $\inf_{g \in M} \|f - g\|_p^p$ das Minimum des Funktionals $F(\epsilon; h) := \|f - g^* - \epsilon h\|_p^p$ für jedes feste $h \in M$ zu betrachten. Offenbar ist dafür notwendig, dass die (Gateaux)-Ableitung $\frac{d}{d\epsilon} F(\epsilon; h)$ bezüglich $\epsilon \in [0, 1]$ an der Stelle $\epsilon =$ nicht negativ ist. Zu zeigen ist also

$$(50) \quad 0 \leq F'(\epsilon; h)|_{\epsilon=0} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\int_G |f - g^* - \epsilon h|^p \, d\mu - \int_G |f - g^*|^p \, d\mu \right] \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_G \phi_\epsilon(x) \, d\mu$$

mit $\phi_\epsilon(x) \equiv [|\phi(x) - \epsilon h(x)|^p - |\phi(x)|^p]/\epsilon$, $\phi(x) \equiv f(x) - g^*(x)$. Wir berechnen zunächst den punktweisen Grenzwert und unterscheiden dabei zwei Fälle

$$i) \quad \phi(x) = 0 : \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi_\epsilon(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{p-1} |h(x)|^p = \begin{cases} 0 & \text{für } p > 1 \\ |h(x)| & \text{für } p = 1 \end{cases}$$

sowie nach der Kettenregel (für ϵ genügend klein)

$$ii) \quad \phi \neq 0 : \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi_\epsilon(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} h(x) \frac{[|\phi(x)| - \epsilon h(x)]^p - |\phi(x)|^p}{\epsilon h(x)} = -p h(x)$$

Punktweiser Limes and Integral können nach dem Lebesgueschen Satz über majorisierte Konvergenz vertauscht werden, denn es gilt mit dem Mittelwertsatz

$$\begin{aligned} |\phi_\epsilon(x)| &\leq [|\phi(x)| + \epsilon |h(x)|]^p - |\phi(x)|^p / \epsilon = p[|\phi(x) + \xi|h(x)]^{p-1}|h(x)| \\ &\leq p 2^{p-1} \max(|\phi(x)|^{p-1}|h(x)|, |h(x)|^p) \end{aligned}$$

Beide Terme in Maximum liefern L_1 -integrierbare Funktionen, denn die Hölder-Ungleichung mit $q = p/(p-1)$ zeigt $|\phi(x)|^{p-1}|h(x)| \in L_p$. Also bekommen wir für beliebiges $h \in M$

$$F'(\epsilon; h)|_{\epsilon=0} = \left\{ \begin{array}{l} -p \int_G h(x) |f(x) - g^*(x)|^{p-1} \text{sign}(f(x) - g^*(x)) d\mu, \quad 1 < p < \infty \\ - \int_{G/Z} h(x) \text{sign}(f(x) - g^*(x)) dx + \int_Z |h(x)| d\mu, \quad p = 1 \end{array} \right\}.$$

wobei $Z := \{x \in G : f(x) = g^*(x)\}$. Damit können wir obige Aussagen beweisen:

Durch Einsetzen von $h(x)$ und $-h(x)$ in (50) folgt sofort die Bedingung von a). Dass sie hinreichend ist, folgt durch ($h = g - g^*$ beliebig in M , $1/q + 1/p = 1$)

$$\begin{aligned} \int |f - g^*|^p d\mu &= \int [(f - g) + (g - g^*)] |f - g^*|^{p-1} \text{sign}(f - g^*) d\mu \\ &= \int (f - g) |f - g^*|^{p-1} \text{sign}(f - g^*) d\mu \\ &\leq \left(\int |f - g|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int |f - g^*|^{(p-1)q} d\mu \right)^{1/q} \end{aligned}$$

wobei zuletzt die Hölder-Ungleichung benutzt wurde. Es ist $(p-1)q = p$ wegen $1/p + 1/q = 1$, so dass nach Division durch $(\int |f - g^*|^p d\mu)^{1/q}$ die Minimaleigenschaft von g^* folgt.

zu b): Im Falle $p = 1$ folgt die Notwendigkeit der Bedingung genau wie eben, während die Hinlänglichkeit eine kleine Variante des obigen Arguments benötigt:

$$\begin{aligned} \int |f - g^*| d\mu &= \int_{G/Z} (f - g) \text{sign}(f - g^*) d\mu + \int_{G/Z} (g - g^*) \text{sgn}(f - g^*) d\mu \\ &= \int_{G/Z} (f - g) \text{sign}(f - g^*) d\mu - \int_{G/Z} |g^* - g| \text{sign}(f - g^*) d\mu \\ &\leq \int_{G/Z} (f - g) \text{sign}(f - g^*) d\mu + \int_Z |f - g| d\mu \end{aligned}$$

wobei $h = g^* - g$ beliebig in M war und $g^*(x) = f(x)$ auf Z benützt wurde.

Es sei noch erwähnt, dass Satz 3.5 auch für konvexe Teilmengen M gilt.

Der Fall $p = \infty$ führt auf noch etwas kompliziertere Bedingungen. Man kann das sogenannte "globale Kolmogorov-Kriterium" beweisen:

Satz 3.6 *Es sei $X := C(\Omega)$, $B =$ kompakte Menge in R^d , $f \in X$ und $M = \text{Span}\{\varphi_i\}_{i=1}^n$. Dann wird $\|r\| := \|f - g\|$ ein Minimum bezüglich $g \in M$ $f \in X$ genau dann, wenn **kein** Vektor $\vec{d} = (d_1, \dots, d_n)$ existiert, der die Ungleichungen*

$$r(x) \sum_{j=1}^n d_j \varphi_j(x) > 0, \quad \forall x \in B^* := \{x \in \Omega : |r(x)| = \|r\|\}$$

erfüllt. Man bezeichnet hier B^* als Menge der aktiven Punkte in B .

Formal stellt die Menge B^* das Analogon zur Menge G/Z aus Satz 3.5 dar, wobei die entsprechende Ungleichung jedoch punktweise gilt.

Um ihre Notwendigkeit zu zeigen, nehme an, dass das Residuum $\|r\|$ kein Minimum wäre. Dann $\exists d \in \mathbb{R}^n$ mit $\|f - g - \sum d_i \varphi_i\|_\infty < \|r\|_\infty$, speziell für $x \in B^*$ gilt dann

$$|r(x) - \sum d_i \varphi_i|^2 < \|r\|_\infty^2 = |r(x)|^2 \quad \Rightarrow \quad 2r(x) \sum d_i \varphi_i(x) > \left| \sum d_i \varphi_i \right|^2.$$

Falls $\|d\|_\infty$ klein genug gewählt wird, folgt dann obige Bedingung.

Auf den Beweis der Hinlänglichkeit sei hier verzichtet. Die Herleitung kann im Rahmen der *Semiinfiniten Optimierung* geschehen oder direkt, s. E.W.Cheney §3.4. Mit dem Lemma von Caratheodory kann man außerdem B^* auf $\leq n + 1$ Punkte reduzieren. Den entscheidenden Fortschritt bezüglich Eindeutigkeit und numerischer Berechnung liefert aber erst die *Haar-Bedingung*, die im nächsten Abschnitt die zentrale Rolle spielt.

3.2 Beste Approximation in Chebychev - Systemen

Da wichtige Räume wie $C[a, b]$ und $L_1(a, b)$ nicht strikt konvex sind, muss man hier die Fragen nach Existenz, Eindeutigkeit und Charakterisierung der besten Approximation in Abhängigkeit von dem jeweiligen Approximationsunterraum studieren.

Eine wichtige Klasse solcher linearer Unterräume bilden Chebychev - Systeme, auch kurz als **T-Systeme** bezeichnet. Für diese ist die sogenannte Haar -Bedingung erfüllt. Sie ermöglicht eine genaue Charakterisierung der besten Approximation von stetigen Funktionen durch Unterräume, die diese Bedingung erfüllen.

Definition 3.3 Eine Folge $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ von stetigen reellwertigen Funktionen auf $C[a, b]$ heißt **Tschebyscheff-System**, wenn es die **Haar-Bedingung** erfüllt, d.h. für jede Wahl von n verschiedenen Punkten x_1, \dots, x_n in $[a, b]$ bilden die Vektoren $g_i := \{\phi_i(x_j)\}_{j=1}^n$ ein linear unabhängiges System in \mathbb{R}^n . Der von den $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ aufgespannte Raum heißt **Tschebyscheff-Raum** oder kurz **T-Raum**.

Um die Rolle der Haar-Bedingung näher zu beleuchten, wird folgendes Lemma formuliert:

Lemma 3.2 Die obige Folge $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ erfüllt die Haar-Bedingung genau dann, wenn

1. die Determinante

$$D \begin{pmatrix} \phi_1 & \dots & \phi_n \\ x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} := \det \begin{vmatrix} \phi_1(x_1) & \dots & \phi_n(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_1(x_n) & \dots & \phi_n(x_n) \end{vmatrix}$$

ist für jede Wahl von paarweise verschiedenen x_i ungleich 0,

2. die Interpolationsaufgabe

$$\phi(x_i) = r_i, \quad \phi = \sum_{j=1}^n \alpha_j \phi_j$$

mit zu bestimmenden Koeffizienten α_j ist für jede Wahl von Daten $\{r_i\}_{i=1}^n$ eindeutig lösbar,

3. jede Linearkombination $\phi = \sum_{j=1}^n \beta_j \phi_j$ hat höchstens $n - 1$ paarweise verschiedene Nullstellen in $[a, b]$.

Der (leichte) Beweis sei dem Leser überlassen. Die Eigenschaft 2) zeigt, dass die Haar-Bedingung für eine vorgegebene Basis von Funktionen äquivalent zur Lösbarkeit einer beliebigen Interpolationsaufgabe im zugehörigen Funktionenraum ist. Dies ist sowohl praktisch wie theoretisch von großer Bedeutung. Die bekanntesten Basissysteme wie Polynome und trigonometrische Polynome in n Variablen erfüllen diese Bedingung, da dann die Interpolationsaufgabe bekanntlich eindeutig lösbar ist (Vandermonde-Determinante). Ferner folgt aus Eigenschaft 2), daß jede Basis eines T -Raumes ist wieder ein Haar-System ist, da ein Basiswechsel nur die Multiplikation mit einer festen regulären Matrix bedeutet.

Die Haar-Bedingung ermöglicht folgende Charakterisierung der besten Approximation:

Satz 3.7 *Es sei M ein n -dimensionales T -System in $C[a, b]$, d.h. die Haar-Bedingung sei erfüllt. Dann ist g^* beste Approximation aus M zu $f \in C(a, b)$ in der Supremum - Norm genau dann, wenn die Fehlerfunktion $f - g^*$ in $[a, b]$ eine **Alternante der Länge $n+1$** besitzt. Per Definition bedeutet dies, dass $f - g^*$ mindestens $n + 1$ alternierende Extrempunkte $\{x_i\}_{i=1}^{n+1}$ in $[a, b]$ besitzt, d.h. es gilt mit einem $\sigma \in \{-1, 1\}$*

$$\sigma[f(x_i) - g_f(x_i)](-1)^i = \|f - g_f\|_{\infty, [a, b]}.$$

Dies kann aus dem Kolmogorov-Kriterium von Satz 3.6 hergeleitet werden, das mit Hilfe der Haar-Bedingung und dem Lemma von Caratheodory in eine Alternanten-Bedingung umgewandelt wird (s. Cheney loc. cit.). Ein direkter Beweis ist in J.R. Rice "The Approximation of Functions", §3.2 zu finden. Die Notwendigkeit der Bedingung wird dort durch die Annahme, dass sie nicht erfüllt ist, bewiesen und die Hinlänglichkeit dadurch, dass die Existenz einer besseren Approximation als obiges g_f angenommen wird.

Dieser Satz ermöglicht die Berechnung durch den **Remez-Algorithmus**. Die Grundidee ist, dass die beste Approximation von $f \in C[a, b]$ sukzessive in $n + 1$ Punkten $X^{(\nu)} = (x_1^{(\nu)}, \dots, x_{n+1}^{(\nu)})$ durch Lösen des Gleichungssystems

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j^{(\nu)} \varphi_j(x_k^{(\nu)}) - f(x_k^{(\nu)}) = \alpha_0^{(\nu)} (-1)^k, \quad k = 1, \dots, n + 1$$

explizit berechnet werden kann. Mit Hilfe der Haar-Bedingung kann man zeigen, dass jedes solche Gleichungssystem eindeutig lösbar ist und dass $\alpha_0^{(\nu)} > 0$ die Größe des Fehlers der besten Approximation darstellt. Der Übergang von $X^{(\nu)}$ zu $X^{(\nu+1)}$ geschieht durch geeigneten *Austausch von Punkten* aus $X^{(\nu)}$ durch neue, derart dass der Wert $\alpha_0^{(\nu)} > 0$ ansteigt. Dann kann man relativ leicht folgern, dass Folge der $X^{(\nu)}$ konvergiert. Der Hauptaufwand besteht aber darin, dann zu zeigen, dass die Grenzwerte der $\alpha_k^{(\nu)}$ die gesuchte beste Approximation auf ganz $[a, b]$ liefern (s. J.R. Rice loc.cit.).

Aus Satz 3.7 kann man auch leicht die Eindeutigkeit folgern:

Satz 3.8 *Ist M ein n -dimensionales T -System in $C[a, b]$, so gibt es genau eine beste Approximation aus M zu $f \in C(a, b)$ in der Supremum - Norm.*

Analog zur strikten Konvexität in Satz 3.3 ist die Haar-Bedingung auch charakteristisch für die Existenz und Eindeutigkeit der besten Approximation in der Supremumsnorm:

Satz 3.9 (Haar) *Es gibt eine eindeutige beste Approximation aus M zu jedem $f \in C(a, b)$ in der Supremum - Norm genau dann, wenn M die Haar-Bedingung erfüllt.*

Die Haar - Bedingung ist auch hilfreich bei der Untersuchung der besten Approximation in der L_1 - Norm.

Zunächst liefert sie als Korollar zu Satz 3.6 die Charakterisierung

Korollar 3.1 *Unter den Voraussetzungen von Satz 3.10 ist $g^* \in M$ beste Approximation im L_1 - Sinne genau dann, wenn gilt*

$$(51) \quad \int_a^b \text{sign}(f - g^*)(x) g(x) dx = 0, \quad \forall g \in M.$$

Daraus ergibt sich weiter die Eindeutigkeit:

Satz 3.10 (Jackson) *Es sei M ein n - dimensionaler Unterraum von $C[a, b]$, für den die Haar - Bedingung erfüllt sei. Dann gibt zu jedem $f \in C(a, b)$ genau eine beste Approximation g^* aus M mit $\|f - g^*\|_{1,(a,b)} = \inf_{g \in M} \|f - g\|_{1,(a,b)}$.*

Im vorliegenden Fall lassen sich aber noch mehr Aussagen gewinnen: für eine bestimmte Teilklasse von $C[a, b]$ kann man die beste Approximation sogar durch Interpolation bestimmen. Dazu führen wir die Begriffe "kanonische Punkte" und "konvexer Kegel" ein:

Definition 3.4 *Es sei M ein n - dimensionaler Unterraum von $C[a, b]$ und $d\mu$ ein Maß auf $[a, b]$ derart, daß $C[a, b] \subset L_1(\mu)$ gilt. Die Punkte x_1, \dots, x_r werden als **kanonische Punkte** von M bezeichnet, wenn gilt ($x_0 := a, x_{r+1} := b$)*

$$(52) \quad \sum_{i=0}^r (-1)^i \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x) d\mu = 0, \quad \forall g \in M.$$

Definition 3.5 *Der **konvexe Kegel $K(M)$** eines linearen Unterraums M von $C[a, b]$ mit Basis $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, der die Haar - Bedingung erfüllt, ist die Menge aller $f \in C[a, b]$, für die $\{f, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ wieder ein Haar -System bzw. T -System ist.*

Mit diesen beiden Begriffen gilt nun

Satz 3.11 *Jeder n - dimensionale Haar - Raum M in $C[a, b]$ besitzt eine eindeutig bestimmte Menge von n kanonischen Punkten in $[a, b]$. Liegt $f \notin M$ im konvexen Kegel von M , so ist die beste Approximation $g^* \in M$ zu f der eindeutig bestimmte Interpolant von f an den kanonischen Punkten von M .*

Dieser Satz zeigt, daß die beste Approximation im L_1 - Sinne sogar noch günstigere Eigenschaften besitzt als diejenige im L_∞ - Sinne, da sie wenigstens für eine Teilklasse durch einen einfachen linearen Operator erhalten werden kann. In dieser Hinsicht verhält sie sich also wie die beste Approximation im Hilbert - Raum. Die kanonischen Punkte einiger konkreter Haar-Systeme listet auf

Lemma 3.3 1. *Der Raum $P_{c,n} := \text{Span}\{1, \cos x, \dots, \cos nx\}$ ist ein Haar-Raum auf $[0, \pi]$. Die kanonischen Punkte von $P_{c,n}$ sind $(j + 1/2)\pi/(n + 1)$, $j = 0, \dots, n$, da*

$$\int_0^\pi \cos kt [\text{sign} \cos(n + 1)t] dt = 0, \quad k = 0, \dots, n.$$

2. *Der Raum $P_{s,n} := \text{Span}\{\sin x, \dots, \sin nx\}$ ist ein Haar-System (der Ordnung n) auf $(0, \pi)$. Die kanonischen Punkte von $P_{s,n}$ sind $j\pi/(n + 1)$, $j = 1, \dots, n$, da*

$$\int_0^\pi \sin kt [\text{sign} \sin(n + 1)t] dt = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

3. Der Raum $P_n := \text{Span} \{1, x, \dots, x^n\}$ ist ein Haar-Raum der Ordnung $n+1$ auf $[-1, 1]$. Es gilt

$$\int_{-1}^1 p(t) [\text{sign } T'_{n+2}(t)] dt = 0 \quad \forall p \in P_n,$$

wobei T_{n+2} das Tschebyscheff-Polynom vom Grad $n+2$ ist. Also sind die Extrema $\cos j\pi/(n+2)$, $1 \leq j \leq n+1$ die kanonischen Punkte von P_n .

(Eine umfassende Darstellung der L_1 -Theorie gibt das Buch von A. Pinkus "On L_1 Approximation", Cambridge 1988.)

Von einem allgemeinen Gesichtspunkt aus betrachtet stellt die Haar-Bedingung jedoch eine sehr einschränkende Bedingung dar, was durch folgenden Satz deutlich wird.

Satz 3.12 *Es gibt kein Haar-System der Dimension > 1 im Raum $C(B)$ der stetigen Funktionen, wobei $B = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$ ist.*

Bezüglich eines Beweises sei auf das Buch von J.R. Rice verwiesen. Es gibt einen weitergehenden Satz von Mairhuber-Curtis, der sogar besagt, daß falls ein Raum $C(B)$ mit einer kompakten Menge B ein reelles Haar-System der Dimension ≥ 2 enthält, die Menge B homeomorph zu einer Teilmenge des Einheitskreises im \mathbb{R}^2 sein muß. Damit kann man bei einer gegebenen kompakten Menge B i.a. nicht erwarten, daß es in $C(B)$ eine Basis von linear unabhängigen stetigen Funktionen gibt, die die Haar-Bedingung erfüllen.

3.3 Beste Approximation in schwachen Tschebyscheff-Systemen

Definition 3.6 *Eine Folge $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ von linear unabhängigen Funktionen in $C[a, b]$ heißt schwaches Tschebyscheff-System / Tschebyscheff-System! schwaches, wenn für jede Wahl von $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$*

$$(53) \quad D(x_1, \dots, x_n) \geq 0, \quad \text{oder} \quad D(x_1, \dots, x_n) \leq 0.$$

für die Determinante aus Lemma 2 gilt. Entsprechend heißt der von den $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ aufgespannte Raum schwacher Tschebyscheff-Raum oder kurz **WT-Raum**.

Von zentraler Bedeutung für den Übergang von WT-Systemen zu T-Systemen ist

Satz 3.13 (Karlin-Studden 1966) *Ein n -dimensionaler Teilraum M von $C[a, b]$ ist ein schwacher Tschebyscheff-Raum genau dann wenn eine Basis g_1, \dots, g_n von M existiert, für die gilt*

$$(54) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \|g_i - g_i^{(\delta)}\|_{\infty, [a, b]} = 0,$$

wobei $\text{span} \{g_1^{(\delta)}, \dots, g_n^{(\delta)}\}$ für jedes $\delta > 0$ ein Tschebyscheff-Raum der Dimension n ist.

Dies führt zu einer anderen Charakterisierung von WT-Räumen, die die Vorzeicheneigenschaft 2) in Lemma 3.2 abschwächt:

Satz 3.14 (Jones-Karlovitz 1970) *Ein linearer Raum mit Basis $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ von linear unabhängigen Funktionen in $C[a, b]$ ist ein WT-Raum genau dann, wenn jede nichttriviale Linearkombination ϕ der ϕ_i höchstens $n-1$ starke Vorzeichenwechsel x_i in $[a, b]$ hat, d.h. ϕ ändert in höchstens $n-1$ verschiedenen Punkten x_i in $[a, b]$ sein Vorzeichen.*

Daraus haben Jones-Karlovitz weiter gefolgert:

Satz 3.15 (Jones-Karlovitz) *Ist M ein WT-Raum der Dimension n in $C[a, b]$, so gibt es zu jedem $f \in C[a, b]$ eine beste gleichmäßige Approximation (d. h. im L_∞ -Sinne) $g_f \in M$ derart, daß $f - g_f$ eine Alternante der Länge $n+1$ besitzt.*

Umgekehrt ist ein $g \in M$ mit dieser Eigenschaft beste Approximation zu f im L_∞ -Sinne.

Bemerkung: Jones-Karlovitz beweisen darüber hinaus, daß endlich-dimensionale Unterräume von $C[a, b]$, für die dieser Satz gilt, notwendigerweise WT-Räume sein müssen, d.h. die Aussage des Satzes charakterisiert gerade die WT-Räume.

Das wichtigste Beispiel von schwachen Tschebyscheff-Räumen sind **Spline-Räume** (s. mein Vorlesungsskript über "Splinefunktionen"). Die Anwendung des obigen Satzes liefert

Korollar 3.2 *Es sei M der in der Einleitung definierte Splineraum $S(k, \Delta, Z)$ der Dimension $n + k$. Dann gibt es zu jedem $f \in C[a, b]$ eine beste Approximation $s_f \in S(k, \Delta, Z)$, so daß die Differenz $f - s_f$ maximal alterniert, d.h. es gilt*

$$\sigma[f(x_i) - s_f(x_i)](-1)^i = \|f - s_f\|_{\infty, [a, b]}, \quad 1 \leq i \leq n + k + 1, \quad \sigma \in \{-1, 1\}$$

I.a. ist aber die beste Approximation in den Splineräumen $S(k, \Delta, Z)$ nicht eindeutig. Es existieren dann exakte Kriterien dafür, wann eine Splinefunktion beste Approximation zu $f \in C[a, b]$ bezüglich der L_∞ -Norm ist. Sie sind allerdings komplizierter als für Tschebyscheff-Räume.

Unter zusätzlichen Bedingungen an f kann auch Eindeutigkeit der besten Approximation gezeigt werden. Diese muß dann mit der in Satz 3.15 angegebenen übereinstimmen. Eine hinreichende Bedingung dafür ist, daß f im konvexen Kegel von $M = S(k, \Delta, Z)$ liegt, s.G.Nürnbergger "Approximation durch Splines".