Prof. Dr. M. Disertori
M.Lager, R. Winter
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn

Analysis in mehreren Veränderlichen

Präsenzblatt

Das Präsenzblatt soll Ihnen dazu dienen die wesentlichen Begriffe der Vorlesung Analysis I zu wiederholen. Ihre Lösungen werden nicht eingesammelt, die Aufgaben werden aber in den Tutorien besprochen.

Aufgabe 1

Entscheiden Sie ob die unten stehenden Folgen konvergent sind und beweisen Sie Ihre Aussage:

(i) $a_k := \frac{k}{k+1}$

(ii) $a_k := \frac{k^4}{e^k}$

(iii) $a_1 := \frac{1}{2}$, $a_{k+1} := \sqrt{a_k}$ für $k \geq 1$

(iv) $a_k := \frac{k^k}{k!}$

(v)* $a_1 := 1$, $a_{k+1} := \frac{k+2}{k} a_k$ für $k \geq 1$

Hinweise: Nutzen Sie in (ii) $e^x := \sum \frac{x^i}{i!}$ und vergleichen Sie die Summanden mit dem Zähler k^4. Zeigen Sie in (iii) zunächst Monotonie und Beschränktheit der Folge. Für (v) iterieren Sie die Vorschrift um a_{k+j} durch a_k auszudrücken. Daran kann man eine geschlossene Formel für a_k ablesen.

Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Definieren Sie, was es für f bedeutet

1. stetig zu sein
2. gleichmäßig stetig zu sein.

Geben Sie eine explizite Funktion f an, die stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 3

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig diffbar mit $f(0) = 0$ und $f'(x) \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie:

(i) $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$ (strikte Monotonie)

(ii) f ist surjektiv

(iii) die Umkehrabbildung von f existiert und ist stetig differenzierbar .

Hinweis: Benutzen Sie in (ii) den Zwischenwertsatz. Folgern Sie (iii) aus einem entsprechenden Satz aus Analysis I.

Aufgabe 4

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge. Zeigen Sie

$$\partial A = \overline{\partial A}.$$

Bestimmen Sie außerdem die Mengen A_1, A_2, die als Randmengen zweier Teilmengen von $\mathbb{R}$ gegeben sind:

$$A_1 = \partial \mathbb{Q} \tag{1}$$

$$A_2 = \partial \mathbb{N}. \tag{2}$$

Aufgabe 5

Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ beliebige Mengen und $C = A \cup B$. Beweisen oder widerlegen Sie:

$$\mathring{C} = \mathring{A} \cup \mathring{B} \tag{3}$$

$$\overline{C} = \overline{A} \cup \overline{B}. \tag{4}$$