Prof. Dr. M. Disertori
M. Lager, R. Winter
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn

Analysis in mehreren Veränderlichen

Blatt 5, Abgabe am 23.11.2017

Beachten Sie: "23. November: Mathe-Party, dieses Mal wieder in der N8schicht"

Aufgabe 1

Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}$ für $(x,y)^t \neq \vec{0}$ und $f(\vec{0}) = 0$.

(i) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_1\partial_2 f(\vec{0})$, $\partial_2\partial_1 f(\vec{0})$

(ii) Wie ist Ihr Ergebnis mit dem Satz von Schwarz vereinbar?

Satz von Schwarz Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$ zweimal stetig differenzierbar. Dann ist für alle Indizes $i, j \in 1, \ldots, n$

$$\partial^2_{ij} f := \partial_i(\partial_j f) = \partial_j(\partial_i f) = \partial^2_{ji} f.$$

3+2 P

Aufgabe 2

Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert als

$$f(z) = \begin{pmatrix} ze^{-z} \\ e^z \end{pmatrix}, \qquad g(x,y) = x^3y^2.$$

(i) Betrachten Sie die linearen Abbildungen $Df, Dg, D(f \circ g), (Df) \circ g, (Dg) \circ f$ und $D(g \circ f)$. In welchen Räumen sind die zugehörigen Jacobi Matrizen?

(ii) Berechnen Sie die Jacobi Matrizen ∇f und ∇g.

(iii) Berechnen Sie mithilfe der Kettenregel $\nabla(f \circ g)$ und $\nabla(g \circ f)$.

(iv) Berechnen Sie ohne die Kettenregel $\nabla(g \circ f)$ und $\nabla(g \circ f)$.

1+1+2+1 P

Aufgabe 3

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ stetig. Zeigen Sie, dass für alle offenen Mengen $V \subset \mathbb{R}^m$ deren Urbilder unter f offen sind, d.h. $f^{-1}(V) = \{x \in U : f(x) \in V\}$ ist offen für alle $V \subset \mathbb{R}^m$ offen. 5 P

Aufgabe 4

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie: die Abbildung $f \cdot g$ ist differenzierbar und es gilt $D(f \cdot g)[\cdot] = f \cdot Dg[\cdot] + Df[\cdot] \cdot g$. 5 P