Prof. Dr. M. Disertori
M. Lager, R. Winter
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn

Analysis in mehreren Veränderlichen

Blatt 4, Abgabe am 16.11.2017

Aufgabe 1

Sei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ eine Folge.

(i) Beweisen Sie: Wenn a_n konvergiert und $\lim_{n\to\infty} a_n = a^*$, dann konvergiert auch $b_n = \|a_n\|$ gegen $\|a^*\|$.

(ii) Für welche Werte von a^* gilt auch die Umkehrung: Wenn $b_n = \|a_n\|$ gegen $\|a^*\|$ konvergiert, dann konvergiert auch a_n gegen a^*.

2+3 P

Aufgabe 2

Definiere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ als $f(x, y) = \cos(x + y) + \sin(x + y)\frac{e^x}{e^y}$.

(i) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f.

(ii) Beweisen oder widerlegen Sie: f ist differenzierbar.

(iii) Sei $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $D_v f$. Erläutern Sie in eigenen Worten die allgemeine Idee von Richtungsableitungen. Was können Sie mithilfe der konkret ausgerechneten Ableitung $D_v f$ über die Funktion f aussagen?

2+1+2 P

Aufgabe 3

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und seien $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Beweisen Sie, dass die Funktion $f \cdot g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$ stetig ist. 5 P

Aufgabe 4

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = 4x^2e^{-x}$. Bestimmen Sie die Nullstellen, Koordinaten und Art von lokalen Extremstellen sowie Wendestellen von f. Bestimmen Sie $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ und skizzieren Sie f. 5 P