Prof. Dr. M. Disertori
M. Lager, R. Winter
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn

Analysis in mehreren Veränderlichen

Blatt 3, Abgabe am 09.11.2017

Aufgabe 1

Sei $\alpha > 0$ und $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha} & \text{for } (x,y) \neq \vec{0}, \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass $f_{1/2}$ stetig ist.

(ii) Zeigen Sie, dass f_1 nicht stetig ist.

(iii*) Für welche anderen α ist f_α stetig?

4+1+2* P

Aufgabe 2

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ heißt komponentenweise stetig, falls die Funktionen $f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_x(y) = f(x,y)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $f_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_y(x) = f(x,y)$ für alle $y \in \mathbb{R}$ stetig sind.

(i) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass dann f komponentenweise stetig ist.

(ii) Finden Sie ein Gegenbeispiel, dass die andere Implikation nicht gilt, d.h. eine komponentenweise stetige, aber nicht stetige Funktion.

3+2 P

Aufgabe 3

Betrachten Sie das Polynom f gegeben durch $f(x,y) = xy^2 + yx + x^3 + 1$.

(i) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_x f$ und $\partial_y f$.

(ii) Berechnen Sie

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(x+h, y+h) - f(x,y)).$$

(iii) Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen dem Ergebnis von (i) und dem von (ii).

2+2+1 P

Aufgabe 4

Sei $f : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, sodass für alle $y \in [0,1]$ gilt: $f(0,y) = 0$ und $f(1,y) = 1$. Beweisen Sie:

(i) Es gibt einen Punkt $(\overline{x}, \overline{y}) \in (0,1) \times (0,1)$, sodass $f(\overline{x}, \overline{y}) = \frac{1}{2}$.

(ii) Es gibt unendlich viele solcher Punkte.

3+2 P