Prof. Dr. M. Disertori
M. Lager, R. Winter
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn

Analysis in mehreren Veränderlichen

Blatt 2, Abgabe am 02.11.2017

Aufgabe 1

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Menge A genau dann abgeschlossen ist, wenn folgendes gilt:

Sei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ eine Folge, die gegen $a^* \in \mathbb{R}^n$ konvergiert. Falls $a_k \in A$ für alle k, dann $a^* \in A$.

5 P

Aufgabe 2

Seien die Folgen (a_n) und (b_n) gegeben durch: $a_n = \sin(n\pi/2)$ und $b_n = n^{(-1)^n}$.

(i) Geben Sie von jeder der Folgen a_n, b_n jeweils eine konvergente Teilfolge an. Warum und gegen was konvergiert die von Ihnen angebene Teilfolge

(ii) Finden Sie für eine der beiden Folgen a_n, b_n eine Teilfolge mit der folgenden Eigenschaft an: keine Teilfolge dieser Teilfolge konvergiert.

2.5+2.5 P

Aufgabe 3

Sei $w \in \mathbb{R}^2$ ein Vektor. Skizzieren Sie die folgenden Mengen und entscheiden Sie ob diese abgeschlossen oder kompakt sind:

(i) $A_1 := ([0,1] \cap \mathbb{Q})^2 \subset \mathbb{R}^2$

(ii) $A_2 := \{v \in \mathbb{R}^2 : v_1^2 + v_2^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$

(iii) $A_3 := \{v \in \mathbb{R}^2 : v \neq \vec{0}, \quad \frac{1}{\|v\|}v = \frac{1}{\|w\|}w\} \subset \mathbb{R}^2$

(iv) $A_4 := \mathbb{Z} \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$

Beweisen Sie jeweils Ihre Behauptung.

1+1+2+1 P

Aufgabe 4

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Funktion f heißt *lipschitz-stetig*, falls eine Konstante $L > 0$ existiert, sodass für alle $x, y \in I$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

(i) Beweisen Sie, dass lipschitz-stetige Funktionen stetig sind.

(ii) Sei f stetig differenzierbar und es existiere eine Konstante $C > 0$, sodass für alle $x \in I$ gilt:

$$|f'(x)| \leq C.$$

Beweisen Sie, dass f lipschitz-stetig ist.

(iii) Für alle $\alpha > 0$ sei $f_\alpha : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f_\alpha(x) = x^\alpha$$

Entscheiden Sie (mit Beweis), für welche Werte $\alpha > 0$ die Funktion f_α lipschitz-stetig ist.

1+2+2 P