Die Mathematik des Zufalls: wie findet die Ameise ihr Zuhause?

Margherita DISERTORI

Antrittsvorlesung

Dies Academicus

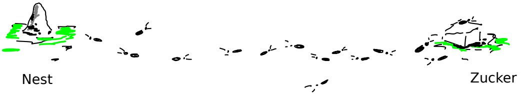
Zufällige Wege wählen. Beispiel

Ameisen . . . irgendwo im Garten

am Anfang

ein wenig später

noch ein wenig später



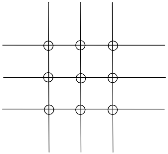
Ameisen haben keinen Stadtplan, kein Smartphone. . .
Erklärung: jede Ameise hinterlässt hinter sich eine chemische Spur

Mathematische Modellierung

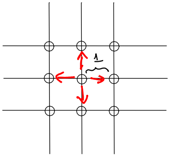
Vereinfachte Annahmen:

- nur <u>**eine**</u> Ameise

- die Ameise bewegt sich über ein Gitter $\mathbb{Z}^2$



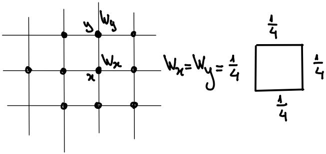
- nur Schritte von Abstand 1



  4 mögliche Richtungen
- glatte Ebene (kein Stein, Blumentopf...)
  alle Richtungen gleich wahrscheinlich
- die Ameise ist <u>**betrunken**</u>
  nach jedem Schritt vergisst sie alles...

Mathematische Modell: Irrfahrt

Auf jedem Punkt in $\mathbb{Z}^2$ liegt ein Würfel

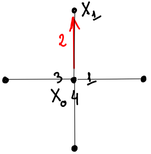


mit 4 Seiten

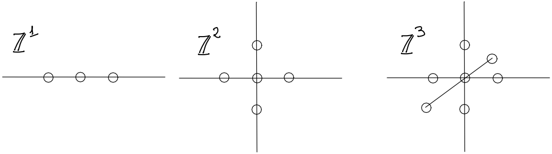
fairer Würfel: jede Seite hat Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$

Erster Schritt: die Ameise ist im Punkt $X_0 = 0$ (Nest)

- sie nimmt den Würfel in X_0
- sie wirft den Würfel und liest das Ergebnis (z.B. 2)
- sie legt den Würfel zurück
- und macht einen Schritt in Richtung 2



Irrfahrt in $\mathbb{Z}^d$, $d = 1, 2, 3$



Wichtige Eigenschaften

- eine Ameise
- fairer Würfel (keine Präferenzrichtung)
- kein Gedächtnis

Rückkehrverhalten

- $d = 1, 2$ die betrunkene Ameise findet fast sicher nach Hause
  ... aber es kann sehr, sehr lange dauern
- $d = 3$ der betrunkene Vogel findet vielleicht niemals nach Hause!

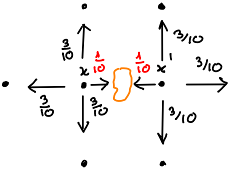
Irrfahrt mit unfairen Würfeln

- eine Ameise 
- die Ameise ist betrunken (kein Gedächtnis)
- neu: es gibt Hindernisse (ein Stein, ein Blumentopf. . .)

nicht alle Richtungen sind gleich wahrscheinlich: **unfairer Würfel**

Auf jedem Punkt in $x \in \mathbb{Z}^2$ liegt ein Würfel W_x mit 4 Seiten

- der Würfel W_x ist unfair
- $W_x \neq W_y$ im Allgemeinen



Rückkehrverhalten

die betrunkene Ameise findet vielleicht niemals nach Hause!

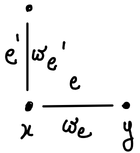
Irrfahrt mit Gedächtnis

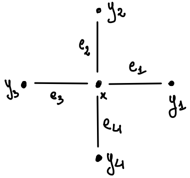
- eine Ameise 
- fairer Würfel (am Anfang)
- neu: die Ameise ist **nicht betrunken**
  - sie hinterlässt eine chemische Spur
  - sie wählt lieber eine Richtung, in welcher der Geruch stärker ist
  - je häufiger eine Richtung gewählt wird, desto stärker wird der Geruch

der Würfel am Punkt x hängt von der Vergangenheit ab

Belohnungssystem

- jeder Kante $e = (x, y) = (y, x)$ ist eine Belohnung $w_e > 0$ zugeordnet





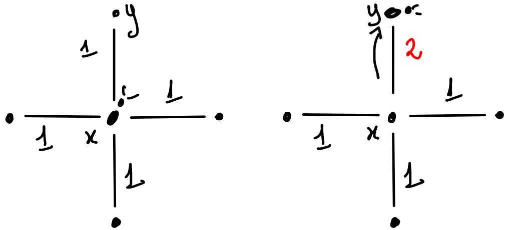
- Wahrscheinlichkeit berechnen: $\mathbb{P}(x \to y_1) := \frac{w_{e_1}}{w_{e_1}+w_{e_2}+w_{e_3}+w_{e_4}}$
- fairer Würfel: $\omega_e = 1\ \forall e$: $\mathbb{P}(x \to y_1) := \frac{1}{1+1+1+1} = \frac{1}{4}$

Am Anfang sind alle Belohnungen gleich: $\omega_e = 1 \; \forall e$

Erster Schritt: die Ameise ist im Punkt $X_0 = x$ (Nest)

- sie wirft den Würfel in X_0 und liest das Ergebnis (z.B. 2) alle Richtungen gleich wahrscheinlich
- sie legt den Würfel zurück und macht einen Schritt in Richtung 2
- sie hinterlässt eine Spur auf der Kante $e = (x, y)$

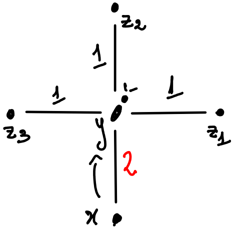
$$\omega_e : 1 \to 1{+}1$$



Zweiter Schritt: die Ameise ist im Punkt $X_1 = y$

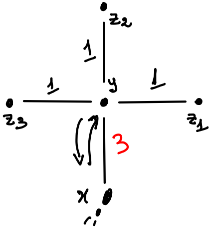
- sie wirft den Würfel in $X_1 = y$

$$\mathbb{P}(y \to x) = \frac{2}{1+1+1+2},$$
$$\mathbb{P}(y \to z_i) = \frac{1}{1+1+1+2} \quad i = 1, 2, 3$$



die Ameise kommt lieber zurück

- wenn das Ergebnis x ist, macht sie einen Schritt zurück



- und hinterlässt eine neue Spur auf der Kante $e = (x, y)$
  $\omega_e : 2 \to 1+2$

. . . nach n Schritten

$$\omega_e^{(n)} := 1 + T_e(n)$$

$T_e(n) =$ Anzahl Überquerungen von e in beide Richtungen

- lineare Verstärkung: $\omega_e = [1 + T_e(n)]^1$
- nicht-lineare Verstärkung: $\omega_e = [1 + T_e(n)]^\alpha \; \alpha > 1$

Ein bisschen Geschichte des Modelles

Edge Reinforced Random Walk (ERRW) (Diaconis 1986)

Motivation: Ein Tourist erkundet eine Stadt

er hat keinen Stadtplan

sein Smartphone ist kaputt…

am Anfang

die Richtung ist ihm egal

…nach einiger Zeit

er ist müde, also wählt er lieber eine Straße, die er schon gesehen hat

Rückkehrverhalten in $d = 2$

- $\alpha > 1$ nach einiger Zeit sitzt die Ameise fest:

  geht nur über eine einzige Kante hin und zurück

  Limic (2003) Limic Tarrès (2007-2008)

- $\alpha = 1$ die Ameise findet fast sicher nach Hause

  ... aber es kann sehr, sehr lange dauern

  Merkl Rolles (2009) Disertori Spencer (2010)
  Sabot Tarrès (2011) Sabot Zeng (2015)

Lineare Verstärkung: LERRW

LERRW $\equiv$ Irrfahrt mit **zufälligen** unfairen Würfeln

random walk in a random environment

das heißt

- eine Belohnung $\omega_e > 0$ an jeder Kante zufällig wählen
  $p(\omega) :=$ Wahrscheinlichkeit der Familie $\omega = (\omega_e)_e$
- Irrfahrt $\mathbb{P}(x \to y) := \frac{\omega_{xy}}{\omega_{xy}+\omega_{xz_1}+\omega_{xz_2}+\omega_{xz_3}}$

$p(\omega) =$ mixing measure

- Gedächtnis ist in $p(\omega)$ versteckt
- Rückkehrverhalten durch Eigenschaften von $p(\omega)$ studieren
- unerwartete (!) Verbindungen von $p(\omega)$ zu
  - Eigenschaften ungeordneter Festkörper - wie Halbleiter
  - Magnetismus - Spin Modelle

Probleme dieser Modellen

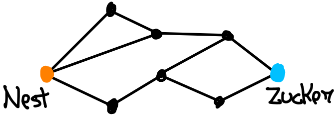
- nur eine Ameise 
- die Ameise hinterlässt eine Spur und kehrt lieber sofort zurück . . . aber sie sollte lieber die Umgebung erkunden um Zucker zu suchen!

mögliche Lösung

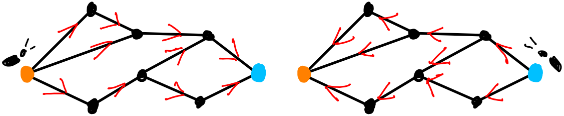
- viele Ameisen 
- jede Ameise kommt nicht zurück, bis sie Zucker gefunden hat (. . . oder tot ist)
- wenn möglich folgt sie lieber der Spur anderer Ameisen

Kürzeste Wege finden: directed random walks

- $N \gg 1$ Ameisen  ...
- Graph: alle möglichen Wege vom Nest zum Zucker und zurück

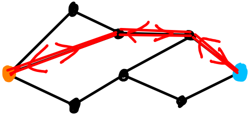


-  am Nest: muss immer nach rechts bis zum Zucker
   am Zucker: muss immer nach links bis zum Nest



- Belohnung der Kante e nach n Schritten $[1 + T_e(n)]^{\alpha}$
  $T_e(n) =$ Anzahl Überquerungen von e in beide Richtungen

Finden die Ameisen den kürzesten Weg?



- ja, aber nur für spezielle Graphen/Modelle

  ... Vela-Pérez Fontelos Velázquez (2011)

  Le Goff Raimond (2015)...

- allgemeiner Fall: noch offen

Zusammenfassung

Zufällige Wege wählen: viele mathematische Modelle

- einfach zu erzählen
- . . . sehr schwierig zu analysieren!
- nur wenige bisher gut verstandene Modelle
- mathematische Methoden: Mischung aus Analysis, Numerik, Wahrscheinlichkeitstheorie, Geometrie, Partielle Differential Gleichungen

DANKE!