Musterlösungen zur Klausur vom 7.2.04

verantwortlich: A. Hahn
Korrekturvorschläge bitte an hahn@uni-bonn.de schicken

Aufgabe 1 a) Die Reihe divergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+n^3} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^3} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \stackrel{(*)}{=} \infty$$

$(*)$: Divergenz der harmonischen Reihe.

b) Die Reihe konvergiert:
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n/2)}{n}$ konvergiert $\stackrel{(*)}{\Longleftrightarrow}$ $\sum_{n \text{ ungerade}} \frac{\sin(\pi n/2)}{n}$ konvergiert
$\stackrel{(**)}{\Longleftrightarrow}$ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ konvergiert.

Nach dem Leibnitz-Kriterium konvergiert die letzte Reihe aber.

$(*)$: $\sin(\pi n/2) = 0$ falls n gerade
$(**)$: $\sin(\pi(2k+1)/2) = (-1)^k$.

c) Die Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cosh(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^n + e^{-n}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (1/e)^n \stackrel{(*)}{<} \infty$$

$(*)$: Konvergenz der geometrischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ mit $q = 1/e < 1$.

Aufgabe 2

a) Die Behauptung folgt durch vollständige Induktion nach n:

Induktions-Verankerung ($n = 1$): Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Induktionsschritt ($n \to n+1$):

Die Behauptung sei wahr für $n \in \mathbb{N}$ (Induktions-Voraussetzung). Dann

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{I.Vor.}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$
$$= \frac{(n+1)^2}{4}(n^2+4(n+1)) = \frac{(n+1)^2}{4}(n+2)^2 = \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4}$$

b) Die Behauptung folgt durch vollständige Induktion nach n:

Induktions-Verankerung ($n = 4$): Für $n = 4$ gilt

$$16 \leq 16 \leq 24 \ \Rightarrow\ 4^2 \leq 2^4 \leq 4! \ \Rightarrow\ n^2 \leq 2^n \leq n!$$

Induktionsschritt ($n \to n+1$):
Die Behauptung sei wahr für $n \geq 4$ (Induktions-Voraussetzung).

Dann gilt einerseits:

$$(n+1)^2 = \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^2 n^2 \overset{I.Vor.}{\leq} (1 + \tfrac{1}{n})^2 2^n \overset{(*)}{\leq} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

$(*)$: $(1 + \frac{1}{n})^2 \leq (1 + \frac{1}{4})^2 = \frac{25}{16} \leq 2.$

Andererseits haben wir:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{I.Vor.}{\leq} 2 \cdot n! \leq (n+1) \cdot n! = (n+1)!$$

c)

$$\sum\nolimits_{n=2}^{\infty} \sum\nolimits_{k=2}^{\infty} \tfrac{1}{n^k} = \sum\nolimits_{n=2}^{\infty} \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{n^k} - 1 - \tfrac{1}{n}\right) \overset{(*)}{=} \sum\nolimits_{n=2}^{\infty} \left(\tfrac{1}{1-1/n} - 1 - \tfrac{1}{n}\right)$$
$$= \sum\nolimits_{n=2}^{\infty} \tfrac{n}{n-1} - \tfrac{1+n}{n} = \sum\nolimits_{n=2}^{\infty} \tfrac{n^2-(n-1)(n+1)}{n(n-1)} = \sum\nolimits_{n=2}^{\infty} \tfrac{1}{n(n-1)}$$
$$= \sum\nolimits_{n=2}^{\infty} \left(\tfrac{1}{n-1} - \tfrac{1}{n}\right) = \lim_{N\to\infty} \left(\sum\nolimits_{n=2}^{N} \tfrac{1}{n-1} - \sum\nolimits_{n=2}^{N} \tfrac{1}{n}\right)$$
$$= \lim_{N\to\infty} \left(\sum\nolimits_{n=1}^{N-1} \tfrac{1}{n} - \sum\nolimits_{n=2}^{N} \tfrac{1}{n}\right) = \lim_{N\to\infty} \left(1 - \tfrac{1}{N}\right) = 1$$

$(*)$: Folgt wegen $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ für $q := \frac{1}{n} < 1$.

Aufgabe 3 Für $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \tfrac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{1}$$
$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \tfrac{z^{2k}}{(2k)!} \tag{2}$$

Damit

$$\begin{aligned}
2\sin(z)\cos(z) &= 2\left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \tfrac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) \times \left(\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \tfrac{z^{2l}}{(2l)!}\right) \\
&\overset{(*)}{=} 2\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \tfrac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^{n-k} \tfrac{z^{2(n-k)}}{(2(n-k))!} \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n+1} \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{(2k+1)!(2(n-k))!} \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n+1} \tfrac{1}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \tfrac{(2n+1)!}{(2k+1)!(2(n-k))!} \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n+1} \tfrac{1}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} \\
&\overset{(**)}{=} 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n+1} \tfrac{1}{(2n+1)!} 2^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tfrac{(2z)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(2z)
\end{aligned}$$

$(*)$: Die rechten Seiten von (1), (2) konvergieren absolut
$\Rightarrow$ Formel für Cauchy-Produkt anwendbar.

$(**)$: $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} = 2^{2n}$ durfte ohne Beweis benutzt werden.

Aufgabe 4 a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x \cosh x}{\exp(x^2)} = 0$: Für $x \geq 0$ gilt:

$$0 \leq \frac{\sinh(x)\cosh(x)}{\exp(x^2)} \leq \frac{\frac{1}{4}(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{\exp(x^2)}$$
$$\leq \frac{1}{4}\frac{e^x 2e^x}{\exp(x^2)} = \tfrac{1}{2}\exp(2x - x^2) \quad (3)$$

Wegen $\lim_{x\to\infty}(2x - x^2) = -\infty$ und $\lim_{y\to-\infty}\exp(y) = 0$ folgt zunächst $\lim_{x\to\infty}\exp(2x - x^2) = 0$ und dann aus (3) und dem Einschnürungsprinzip die Behauptung.

b) zweimalige Anwendung der Regel von de l'Hospital (bei $(*)$, $(**)$) ergibt

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x)\sinh(x)} \overset{(*)}{=} \lim_{x\downarrow 0} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)\sinh(x) + \sin(x)\cosh(x)}$$

$$\overset{(**)}{=} \lim_{x\downarrow 0} \frac{-\cos(x)}{-\sin(x)\sinh(x) + \cos(x)\cosh(x) + \cos(x)\cosh(x) + \sin(x)\sinh(x)}$$
$$= \frac{-1}{-0 + 1 + 1 + 0} = -\frac{1}{2}$$

c)

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\big[\exp(-x^4)\sin(\log x)\big] \\
&\overset{(*)}{=} \sin(\log x)\frac{d}{dx}\exp(-x^4) + \exp(-x^4)\frac{d}{dx}\sin(\log x) \\
&\overset{(**)}{=} \sin(\log x)(-4x^3\exp(-x^4)) + \exp(-x^4)\cos(\log x)\tfrac{1}{x} \\
&= \exp(-x^4)\big(\cos(\log x)\tfrac{1}{x} - 4x^3\sin(\log x)\big)
\end{aligned}$$

$(*)$: Produktregel
$(**)$: zweimal Kettenregel

Aufgabe 5 a) i) f ist surjektiv: f ist die Verkettung stetiger Funktionen und somit selbst stetig. Wegen $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0}(\sinh x)^3 = (\sinh(0))^3 = 0$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(\sinh x)^3 = \infty$ folgt aus dem Zwischenwertsatz also die Behauptung.

ii) f ist injektiv: Dies folgt sofort aus Teil iii).

iii) $f' > 0$: f ist die Verkettung differenzierbarer Funktionen und somit selbst differenzierbar. Anwendung der Kettenregel ergibt

$$f'(x) = 3(\sinh x)^2 \cosh(x) > 0$$

da $\sinh(x) \neq 0$ für $x \neq 0$ und $\cosh(x) \geq 1$ für $x \in \mathbb{R}$.

iv) Existenz und Berechnung der Ableitung von $g := f^{-1}$: Aus iii) ergibt sich mit Hilfe eines Standardsatzes (der wiederum leicht aus der Kettenregel folgt, vgl. Vorlesung oder Forster, Königsberger, ...), dass g differenzierbar ist und dass für jedes $x \in]0,\infty[$ gilt:

$$g'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Nun ist aber $f'(x) = 3(\sinh x)^2 \cosh(x) = 3(\sinh x)^2 \sqrt{1+\sinh^2(x)}$ und $f^{-1}(y) = \sinh^{-1}(\sqrt[3]{y})$. Damit bekommen wir

$$g'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2\sqrt{1+(\sqrt[3]{x})^2}} = \frac{1}{3x^{2/3}\sqrt{1+x^{2/3}}}$$

b) Da die Funtion $f' : [0,1] \to \mathbb{R}$ auf dem abgeschlossenen (!) Intervall $[0,1]$ nach Voraussetzung stetig ist, ist f' beschränkt (vgl. Satz der Vorlesung), d.h. $\exists L > 0 : \forall x \in [0,1] : |f'(x)| \leq L$. Aus dem Schrankensatz folgt also $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$ für alle $x, y \in [0,1]$. Dies war zu zeigen.

Aufgabe 6

a) Zu zeigen sind folgende Aussagen:

i) $f(0) = 0$:

ii) f is differenzierbar auf $\mathbb{R}$

iii) $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

Beweis von i): $f(0) + f(0) \overset{Fktl.Gl}{=} f\left(\frac{0+0}{1-0\cdot 0}\right) = f(0) \;\Rightarrow\; f(0) = 0.$

(simultaner) Beweis von ii) und iii), 1. Möglichkeit:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \overset{(1)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+f(-x)}{h} \overset{Fktl.Gl}{=} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} f\left(\frac{h}{1+x^2-hx}\right)$$

$$= \left(\lim_{h\to 0} \frac{1+x^2-hx}{h} f\left(\frac{h}{1+x^2-hx}\right)\right) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{1+x^2-hx} \overset{(2)}{=} 1 \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

(1): $f(-x) = -f(-x)$, da $f(x) + f(-x) \overset{Fktl.Gl}{=} f\left(\frac{x-x}{1+x\cdot x}\right) = f(0) \overset{i)}{=} 0$

(2): $\lim_{h\to 0} \frac{h}{1+x^2-hx} = 0$ sowie $\lim_{y\to 0} \frac{f(y)}{y} = 1$ (vgl. Voraussetzung)

Wichtig: Die Existenz jedes vorkommenden Limes folgt aus der Existenz des jeweils nachfolgenden Limes. Insbesondere wird durch die obige Gleichungskette wirklich die Existenz von $f'(x)$ bewiesen.

(simultaner) Beweis von ii) und iii), 2. Möglichkeit:

$$f'(x) = \lim_{z\to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \overset{(1)}{=} \lim_{y\to 0} \frac{f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) - f(x)}{\frac{x+y}{1-xy} - x} \overset{Fktl.Gl}{=} \lim_{y\to 0} \frac{f(y)}{\frac{x+y}{1-xy} - x}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{f(y)}{y} \lim_{y\to 0} \frac{y}{\frac{x+y}{1-xy} - x} \overset{(2)}{=} 1 \cdot \lim_{y\to 0} \frac{y}{\frac{x+y}{1-xy} - x}$$

$$\overset{(3)}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\frac{d}{dy}\, y}{\frac{d}{dy}\left(\frac{x+y}{1-xy} - x\right)} = \lim_{y\to 0} \left(\frac{1}{1-xy} - \frac{x+y}{(1-xy)^2} \cdot (-x)\right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{1}{1-x\cdot 0} - \frac{x+0}{(1-x\cdot 0)^2} \cdot (-x)\right)^{-1} = \left(1 - x\cdot(-x)\right)^{-1} = \frac{1}{1+x^2}$$

(1): $\lim_{y\to 0} \frac{x+y}{1-xy} = x$

(2): $\lim_{y\to 0} \frac{f(y)}{y} = 1$ (vgl. Voraussetzung)

(3): Regel von de l'Hospital

Wichtig: Die Existenz jedes vorkommenden Limes folgt aus der Existenz des jeweils nachfolgenden Limes. Insbesondere wird durch die obige Gleichungskette wirklich die Existenz von $f'(x)$ bewiesen.

b) Bekanntlich ist $\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Damit gilt

$$\frac{d}{dx}\big(\arctan(x) - f(x)\big) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

also ist $\arctan(x) - f(x)$ konstant. Wegen

$$\arctan(0) - f(0) \overset{i)}{=} \arctan(0) - 0 = 0$$

($\arctan(0) = 0$ für den Hauptzweig) folgt die Behauptung.

Aufgabe 7 a) Korrekt. Begründung völlig analog zur Begründung von Teil b).

b) Korrekt. Offenbar gilt $M_b = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}^k$. $\mathbb{Q}$ ist abzählbar, damit auch $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ und allgemein $\mathbb{Q}^k$ für beliebiges k (Beweis durch vollständige Induktion). $M_b = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}^k$ ist damit die abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen und somit selbst abzählbar.

c) Falsch! Nicht einmal die Teil-Menge $M_e = \{(x_1, x_2, \ldots) \mid x_k \in \{-1, 1\}(\forall k \in \mathbb{N})\}$ von M_c ist abzählbar: man sieht leicht, dass M_e bijektiv auf die Potenzmenge von $\mathbb{N}$ abgebildet werden kann. Gemäß Aufgabe 3 auf Aufgabenblatt 5 ist damit M_e und erst recht M_c überabzählbar.

d) Falsch! Gegenbeispiel: Das offene Intervall $]0, 1[$.

e) Korrekt. Für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sinh(ix) = \frac{1}{2}(e^{ix} - e^{-ix}) = \frac{1}{2}(\cos(x) + i\sin(x) - (cos(x) - i\sin(x)) = i\sin(x)$. Wegen $|i\sin(x)| = |\sin(x)| \in [0, 1]$, $x \in \mathbb{R}$, ist $\{\sinh(ix) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{i\sin(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ also beschränkt.

f) Falsch! Für beliebiges $x \in \mathbb{C}$ gilt $\cosh(ix) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \frac{1}{2}(\cos(x) + i\sin(x) + (\cos(x) - i\sin(x)) = \cos(x)$ und damit $\cos(ix) = \cosh(-x)$. Wegen $\lim_{x\to\infty} \cosh(-x) = \infty$ kann also nicht einmal die Teilmenge $\{\cos(ix) \mid x \in \mathbb{R}\}$ von $\{\cos(z) \mid z \in \mathbb{C}\}$ beschränkt sein.

g) Falsch! Die Schreibweise $z^2 \geq 0$ ist eine schlampige Schreibweise für $z^2 \in \mathbb{R}_+$. Dies ist jedoch falsch. Gegenbeispiel: $z := \exp(\pi i/4)$ (für dieses z gilt ja $z^2 = \exp(2 \cdot \pi i/4) = i$).

Bemerkung: Die Behauptung der Aufgabe wird richtig, wenn man überall z^2 durch $|z|^2$ ersetzt.

h) Korrekt. Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $|\exp(x + iy)| = |\exp(x)| \cdot |\exp(iy)| = |\exp(x)| \cdot 1 = \exp(x)$ da $\exp(x) \geq 0$.

i) Falsch! $\left|\frac{3+4i}{1-i}\right| = \left|\frac{\sqrt{3^2+4^2}}{\sqrt{1^2+1^2}}\right| = \frac{5}{\sqrt{2}} \neq \frac{5}{2}$

j) Falsch! Gegenbeispiel: Nehme sowohl für A als auch für B die (natürlich falsche) Aussage $0 = 1$. Dann ist $\neg A$ und damit auch $(A \Rightarrow B) \vee (\neg A)$ wahr. Da B falsch ist, ist somit $(A \Rightarrow B) \vee (\neg A) \Rightarrow B$ falsch.

Aufgabe 8 a) Korrekt. Dies folgt leicht aus der Definition des Begriffes "Cauchy-Folge". Alternativ kann man – unter Ausnutzung der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ – wie folgt argumentieren: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, so konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Also konvergiert auch jede Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ist somit eine Cauchy-Folge.

b) Falsch! Gegenbeispiel: Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = (-1)^n$ konvergiert nicht, trotzdem hat sie die Eigenschaft, dass jede ihrer Teilfolgen eine konvergente Teilfolge besitzt:

In jeder Teilfolge von $(x_n)_n$ kommt nämlich die Zahl 1 oder aber die Zahl -1 unendlich oft vor. Im ersten Fall bekommt man durch Weglassen aller "-1" eine (unendliche) Folge, die nur den Wert 1 annimmt und somit konvergiert. Im zweiten Fall bekommt man durch Weglassen aller "1" eine unendliche Folge, die nur den Wert -1 annimmt und somit konvergiert.

c) Korrekt. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge reeller Zahlen. Wir betrachten die Menge

$$A := \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ mit } \forall m \geq n : x_n \geq x_m\}$$

1. Fall: A ist unendlich. Bezeichnet dann n_j für $j \in \mathbb{N}$ das j-kleinste Element von A, so ist $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Fall: A ist endlich. Dann lässt sich für jedes hinreichend "späte" Glied von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein nachfolgendes Folgenglied finden, welches größer ist. (genauer: $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \exists m > n : x_m > x_n$). Daraus folgt aber sofort, dass man eine (sogar streng) monoton wachsende Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstruieren kann. (Details: Definiere $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch $n_1 := n_0$ wo n_0 wie oben und $n_{j+1} := \min\{n \in \mathbb{N} \mid n > n_j \text{ mit } x_n > x_{n_j}\}$. Offensichtlich ist dann $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ eine (streng) monoton wachsende Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

d) Falsch! Gegenbeispiel: $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \frac{1}{n}$ und $a_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Offensichtlich konvergiert $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, es gilt $b_n = a_{n+1} - a_n$, aber die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist je gerade die Partialsummenfolge der (bekanntlich divergenten) harmonische Reihe.

e) Korrekt. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so auch die Folgen $(2a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{n+2})_{n\in\mathbb{N}}$. Da man durch die gliedweise Addition endlich vieler konvergenter Folgen stets eine weitere konvergente Folge bekommt, ist die Behauptung korrekt.

f) Falsch! Gegenbeispiel: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $a_n = (-1)^n$ und $d_n = \frac{1}{4}(a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n)$ definiert. $(a_n)_n$ ist keine Nullfolge, also kann $\sum_{n=1}^\infty a_n$ nicht konvergieren. Da aber $d_n = 0$ für jedes n ist, ist $\sum_{n=1}^\infty d_n$ trivialerweise auch konvergent.

g) Korrekt. Bekanntlich ist $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} < \infty$. Ist auch $\sum_{n=1}^\infty a_n^2 < \infty$, so folgt $\sum_{n=1}^\infty \left|\frac{a_n}{n}\right| \leq \sum_{n=1}^\infty 2|a_n|\frac{1}{n} \leq \sum_{n=1}^\infty (a_n^2 + \frac{1}{n^2}) < \infty$. Also konvergiert $\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{n}$ sogar absolut.

h) Korrekt. Die Behauptung besagt ja gerade, dass jede absolut konvergente Reihe konvergiert.

i) Falsch! Gegenbeispiel: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$.

j) Korrekt. Die Funktion $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig. Bekanntlich gilt für jede stetige Funktion:

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent $\Rightarrow$ $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent (und zwar gilt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n)$).

Aufgabe 9 a) Korrekt, vgl. Standardlehrbücher der Analysis (Königsberger, Fischer, ...).

b) Falsch! Gegenbeispiele

$$f(x) := \begin{cases} 2x & \text{für } x \geq 0 \\ x & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

oder

$$g(x) := \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

f, g sind stetig, streng monoton wachsend aber im Punkt $x = 0$ (aus unterschiedlichen Gründen) nicht differenzierbar.

c) Falsch! f ist im Punkt 0 nicht differenzierbar, da einerseits $\frac{f(h)-f(0)}{h} = \sin(1/h)$ gilt und da andererseits $\lim_{h\to 0} \sin(1/h)$ nich existiert.

d) Falsch! Gegenbeispiel

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{für } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ x+1 & \text{für } \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

f ist streng monoton wachsend, nimmt aber den Wert $1 \in [0,2] = [f(0), f(1)]$ nicht an.

(Beachte: Der Zwischenwertsatz gilt für *stetige* Funktionen. f war aber nicht als stetig vorausgesetzt.)

e) Korrekt. Wähle $\epsilon > 0$ beliebig. Da f gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass $\forall x, y \in]0,1[\colon \big[|x-y| \le \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \epsilon\big]$ gilt. Sei N die kleinste natürliche Zahl, welche größer als $\frac{1}{\delta}$ ist. Für beliebiges $x \in]0,1[$ ist dann das Intervall zwischen x und $\frac{1}{2}$ die Aneinanderreihung von genau N Intervallen der Länge $\frac{|1/2-x|}{N} < \delta$. Auf jedem dieser N Intervalle kann f also höchstens um den Wert ϵ schwanken. Aus der Dreiecksungleichung folgt dann sofort $|f(x) - f(1/2)| \le N \cdot \epsilon$. Damit bekommen wir:

$$\forall x \in]0,1[\colon \quad -N \cdot \epsilon - f(1/2) \le f(x) \le N \cdot \epsilon + f(1/2)$$

f) Falsch! Eine konvexe Funktion $f\ \colon]0,1[\to \mathbb{R}$ braucht nicht differenzierbar (geschweige denn 2-mal differenzierbar) zu sein. Gegenbeispiel: $f(x) := |x - 1/2|$ für $x \in]0,1[$. f ist konvex aber im Punkt $x = 1/2$ nicht differenzierbar.

g) Korrekt, vgl. Vorlesung oder Königsberger.

h) Falsch! Gegenbeispiel: $f(x) := 1 - \frac{1}{1+x}$ für $x \in [0, \infty[$. f ist streng monoton wachsend und beschränkt.

i) Korrekt, denn offensichtlich ist $f(0)$ eine obere Schranke und 0 eine untere Schranke von f.

j) Falsch! Gegenbeispiel: $f(x) := \frac{1}{1+x}$ für $x \in [0, \infty[$. Offensichtlich ist

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f(x)| = 1 \ne 0 = \lim_{x\to\infty} f(x) = \limsup_{x\to\infty} f(x)$$