WS 03/04 **7.2.2004**

Analysis I – Klausur

Aufgabe 1 *(3+3+3 Pkte).* Überprüfe die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+n^3}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n/2)}{n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cosh(n)}$

(kurze Begründung, z.B. Vergleich mit bekannten Reihen)

Aufgabe 2 *(6+6+6 Pkte).* Zeige:

a) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$

b) $n^2 \leq 2^n \leq n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n^k} = 1$

Aufgabe 3 *(8 Pkte).* Beweise die Formel

$$2\sin(z)\cos(z) = \sin(2z) \qquad (\forall z \in \mathbb{C})$$

mit Hilfe der Reihendarstellungen von sin und cos
Dabei darf ohne Beweis verwendet werden, dass

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} = 2^{2n} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

Aufgabe 4 *(5+5+5 Pkte).* Bestimme (jeweils mit <u>kurzer</u> Begründung)

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh(x)\cdot\cosh(x)}{\exp(x^2)}$

b) $\lim_{x\downarrow 0} \frac{\cos(x)-1}{\sin(x)\cdot\sinh(x)}$

c) die Ableitung der Funktion $f(x) = \exp(-x^4)\cdot\sin(\log x)$ auf $]0,\infty[$

Aufgabe 5 *(6+4 Pkte).*

a) Zeige: $f :]0,\infty[\to]0,\infty[\,,\ x \mapsto (\sinh x)^3$ ist bijektiv mit differenzierbarer Inverse $g = f^{-1}$. Berechne g'.

b) Zeige: Jede stetig differenzierbare Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig.

Aufgabe 6 *(6+4 Pkte).* Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle die Funktionalgleichung

$$f(x) + f(y) = f\left(\tfrac{x+y}{1-xy}\right)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $xy < 1$ und es gelte $\lim_{y\to 0} \frac{1}{y} f(y) = 1$.

a) Zeige: $f(0) = 0$ und f ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

b) Zeige, dass aus den in a) formulierten Eigenschaften folgt: $f = \arctan$ (Hauptzweig).

Die folgenden Aufgaben 7, 8 und 9 bestehen aus jeweils 10 Teilaufgaben. Jede Teilaufgabe ist mit **w** *oder* **f** *zu beantworten (je nachdem, ob man die entsprechende Aussage für wahr oder falsch hält). Die Antworten sind nicht zu begründen und sollen bitte nicht kommentiert werden. Jede richtige Antwort zählt 1 Pkt.*

Aufgabe 7 *(*10×1 *Pkt).* Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?

a) Die Menge

$$M_a = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid n \in \mathbb{N}, x_k \in \mathbb{Z} \ (\forall k = 1, \ldots, n)\}$$

aller endlicher Folgen ganzer Zahlen ist abzählbar.

b) Die Menge M_b aller endlicher Folgen rationaler Zahlen ist abzählbar.

c) Die Menge $M_c = \{(x_1, x_2, \ldots) \mid x_k \in \mathbb{Q} \ (\forall k \in \mathbb{N})\}$ aller Folgen rationaler Zahlen ist abzählbar.

d) Jede beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ enthält ein größtes Element

e) Die Menge $\{\sinh(ix) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ist beschränkt.

f) Die Menge $\{\cos(z) \mid z \in \mathbb{C}\}$ ist beschränkt.

g) $\forall z \in \mathbb{C}: \quad z^2 \geq 0$ und $(z^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0)$

h) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad |\exp(x + iy)| = \exp(x)$

i) $\left|\frac{3+4i}{1-i}\right| = \frac{5}{2}$

j) Für alle Aussagen A, B gilt: $\quad (A \Rightarrow B) \vee (\neg A) \Rightarrow B$

Aufgabe 8 *(10 × 1 Pkt).* Welche der folgenden Aussagen über Folgen reller Zahlen sind wahr, welche falsch?

a) Jede Teilfolge einer Cauchy-Folge ist wieder eine Cauchy-Folge

b) Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn jede ihrer Teilfolgen eine konvergente Teilfolge besitzt.

c) Jede Folge enthält eine monotone Teilfolge.

d) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $b_n = a_{n+1} - a_n$. Ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

e) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $c_n = a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n$. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so auch $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

f) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $d_n = \frac{1}{4}(a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ konvergiert.

g) Mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$

h) Mit $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

i) Mit $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

j) Mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auch $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$

Aufgabe 9 *(*10×1 *Pkt).* Welche der folgenden Aussagen über relle Funktionen sind wahr, welche falsch?

a) Jede stetige Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig.

b) Jede stetige, streng monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar.

c) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(0) := 0$ und $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \neq 0$ ist differenzierbar in 0, aber nicht stetig differenzierbar.

d) Jede streng monotone Funtion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert zwischen $f(0)$ und $f(1)$ an.

e) Jede gleichmäßig stetige Funktion $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ ist beschränkt.

f) Eine Funktion $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn sie zweimal differenzierbar ist mit $f'' \geq 0$.

g) Jede konvexe Funktion $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ ist stetig.

h) Jede streng monoton wachsende Funktion $f : [0, \infty[\ \to [0, \infty[$ ist unbeschränkt.

i) Jede streng monoton fallende Funktion $f : [0, \infty[\ \to [0, \infty[$ ist beschränkt.

j) Eine stetige Funktion $f : [0, \infty[\ \to [0, \infty[$ ist genau dann beschränkt, wenn $\limsup_{x \to \infty} f(x) < \infty$ ist, und in diesem Fall gilt

$$\sup_{x \in [0, \infty[} |f(x)| = \limsup_{x \to \infty} f(x)$$