Dozent: Karl-Theodor Sturm Assistent: Atle Hahn

Analysis I

Aufgabe 1.

i) Zeige:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$, für die $\tan(x)$, $\tan(y)$ und $\tan(x+y)$ definiert sind ("Additionstheorem für tan").

ii) Beweise die "Moivresche Formeln":

$$\begin{aligned}\cos(nx) &= \cos(x)^n - \binom{n}{2}\cos(x)^{n-2}\sin(x)^2 \\ &\quad + \binom{n}{4}\cos(x)^{n-4}\sin(x)^4 - \dots \\ \sin(nx) &= n\cos(x)^{n-1}\sin(x) - \binom{n}{3}\cos(x)^{n-3}\sin(x)^3 \\ &\quad + \binom{n}{5}\cos(x)^{n-5}\sin(x)^5 - \dots\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2. Sei $x \in \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ definieren wir $z_k^n := \exp(i\frac{k}{n}x)$ sowie $L_n := \sum_{k=1}^n |z_k^n - z_{k-1}^n|$. L_n ist also gerade die Länge des Polygonzuges $z_0^n, z_1^n, \dots, z_n^n$ in der komplexen Zahlenebene.

Zeige zunächst $L_n = 2n\sin(\frac{x}{2n})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und folgere daraus $\lim_{n\to\infty} L_n = x$. Ist insbesondere $x \in [0, 2\pi]$, so bedeutet dieses Resultat anschaulich, dass x gerade gleich der Länge desjenigen (positiv orientierten) Bogens auf dem Einheitskreis ist, der im Punkt $1 \in \mathbb{C}$ beginnt und im Punkt $\exp(ix)$ endet.

Aufgabe 3. Für drei komplexe Zahlen z_1, z_2, z_3 gelte

$$z_1 + z_1 + z_3 = 0 \quad \text{sowie} \quad |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1.$$

Zeige, dass die Punkte z_1, z_2, z_3 ein gleichseitiges Dreieck in der komplexen Zahlenebene bilden.

Aufgabe 4. Es bezeichne $\mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$ den Raum der komplexen $d \times d$-Matrizen. Wir sagen, dass eine Folge von Matrizen $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $M_n \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$, gegen eine Matrix $M \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$ konvergiert, wenn die Komponenten von $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen die jeweiligen Komponenten von M konvergieren, d.h. wenn für alle $i, j \leq d$ gilt: $(M_n)_{ij} \to M_{ij}$ für $n \to \infty$.

Man setzt für jedes $A \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$

$$\exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} := \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{A^n}{n!}$$

i) Zeige, dass der Limes $\lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{A^n}{n!}$ tatsächlich existiert und $\exp(A)$ damit wohldefiniert ist.

Hinweis: Zeige zunächst $\max_{i,j} |(A^n)_{ij}| \leq d^{n-1} \big(\max_{i,j} |A_{ij}| \big)^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

ii) Zeige: Sind $A, B \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$ zwei kommutierende Matrizen (d.h. gilt $AB = BA$), so folgt $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$.

iii) Berechne $\exp \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ sowie $\exp \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ für $a \in \mathbb{C}$.