WS 2003/2004 **Blatt 8** 4.12.2003

Dozent: Karl-Theodor Sturm Assistent: Atle Hahn

Analysis I

Aufgabe 1.

i) Schreibe die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$:
$\frac{1}{3+7i}$, $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$, $\left(\frac{\sqrt{3}i-1}{2}\right)^3$.

ii) Beweise das sogenannte "Parallelogramm-Gesetz":

$$\forall w, z \in \mathbb{C}: \quad |w+z|^2 + |w-z|^2 = 2\big(|w|^2 + |z|^2\big)$$

Aufgabe 2. Die durch $\pi_k^\lambda := \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k \in \mathbb{N}_0$. für festes $\lambda > 0$ definierte Folge $\pi^\lambda := (\pi_k^\lambda)_{k\in\mathbb{N}_0}$ heißt *Poisson-Verteilung zum Parameter* λ.

i) Zeige, dass $\pi^\lambda = (\pi_k^\lambda)_{k\in\mathbb{N}_0}$ für jedes $\lambda > 0$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{N}_0$ ist und berechne den Erwartungswert von π^λ (vgl. Aufgabe 1 von Blatt 7).

ii) Zeige:

$$\forall \lambda, \nu > 0: \quad \pi^{\lambda+\nu} = \pi^\lambda \star \pi^\nu$$

iii) Berechne die erzeugende Funktion von $\pi^\lambda = (\pi_k^\lambda)_{k\in\mathbb{N}_0}$ (vgl. Aufgabe 1 von Blatt 7).

Aufgabe 3. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $\sum_{k=1}^\infty |a_k| < \infty$ und sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die durch $p_n = \prod_{k=1}^n (1 + a_k)$, $n \in \mathbb{N}$, definierte Folge.

i) Beweise unter der Zusatzvoraussetzung $a_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, dass $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

ii) Beweise nun die Konvergenz von $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im allgemeinen Fall. Zeige ferner, dass der Limes von $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Null verschieden ist, falls $a_k \neq -1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Hinweis (für beide Aufgabenteile): Beachte $|p_n - p_m| = \left|1 - \frac{p_m}{p_n}\right| |p_n|$ und weise damit nach, dass $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ das Cauchy-Kriterium erfüllt.

Aufgabe 4. Sei $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Folge der Primzahlen.

Zeige mit Hilfe von Aufgabe 3 oben sowie Aufgabe 4 i) von Blatt 7, dass die Reihe $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{p_k}$ divergiert ("Satz von Euler").

Insbesondere gibt es also keine zwei Zahlen $\alpha > 0$ und $\beta > 1$ mit $p_k \geq \alpha k^\beta$ für alle k.