WS 2003/2004 **Blatt 7** 27.11.2003

Dozent: Karl-Theodor Sturm Assistent: Atle Hahn

# Analysis I

**Aufgabe 1.** Für jede Wahrscheinlichkeitsverteilung $p = (p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf $\mathbb{N}_0$ definiert man den *Erwartungswert* $\mu_p$ und die *erzeugende Funktion* $\varphi_p : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $\mu_p := \sum_{k\in\mathbb{N}_0} k\, p_k$ und $\varphi_p(t) := \sum_{k\in\mathbb{N}_0} t^k p_k$, $t \in [0,1]$.

Seien $p = (p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $q = (q_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $\mathbb{N}_0$ und $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ drei beliebige Folgen reeller Zahlen. Zeige:

i) $\mu_{p\star q} = \mu_p + \mu_q$

ii) $\varphi_{p\star q}(t) = \varphi_p(t)\cdot\varphi_q(t) \quad \forall t \in [0,1]$

iii) $x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$, wobei $\star$ für die Faltung zweier Folgen steht.

**Aufgabe 2.** Sei $p \in ]0,1[$ und $k \in \mathbb{N}$. Zeige:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)p^n = \frac{k!}{(1-p)^{k+1}}$$

Hinweis: Entwickle die rechte Seite in eine ($k+1$-fache) unendliche Reihe und benutze Aufgabe 3 ii) von Blatt 2 zur Bose-Einstein-Statistik.

**Aufgabe 3.** Zeige:

i) Das Cauchy-Produkt von $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ mit sich selbst definiert eine divergente Reihe.

ii) Das Cauchy-Produkt von $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ mit sich selbst definiert eine konvergente Reihe.

Hinweis für Teil ii): $\frac{1}{k}\frac{1}{n-k} = \frac{1}{n}(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k})$; beachte außerdem Aufgabe 1 ii) von Blatt 3.

**Aufgabe 4.** Sei $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Folge der Primzahlen und $J_N$ die Menge der natürlichen Zahlen, deren Primfaktoren zu $\{p_1, \dots, p_N\}$ gehören. Zeige:

i) Für jedes rationale $s > 0$ ist die Familie $(n^{-s})_{n\in J_N}$ summierbar und es gilt

$$\sum_{n\in J_N} n^{-s} = \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-p_k^{-s}}$$

ii) Für $s > 1$ gilt

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \lim_{N\to\infty} \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-p_k^{-s}}$$

Hinweis: Entwickle jedes $\frac{1}{1-p_k^{-s}}$, $k \in \mathbb{N}$, in eine geometrische Reihe.