WS 2003/2004 **Blatt 5** 13.11.2003

Dozent: Karl-Theodor Sturm Assistent: Atle Hahn

Analysis I

Aufgabe 1. Folgere direkt aus den Axiomen der reellen Zahlen (und den jeweils relevanten Definitionen, also z.B. der Definition von 0, $\mathbb{N}$, $-x$ für $x \in \mathbb{R}$ usw.):

i) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt genau dann $x \cdot y = 0$, wenn $x = 0$ oder $y = 0$.
ii) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
iii) $a^2 > 0$ für jedes $a \neq 0$.
iv) $\frac{1}{2}(x + \frac{1}{x}) \geq 1$ für jedes $x > 0$.
v) Für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $m + n \in \mathbb{N}$.
vi) Für $a, b, c, d > 0$ mit $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ gilt

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Hinweise: Jedes benutzte Axiom sollte erwähnt werden. Die Ergebnisse eines Aufgabenteils dürfen für nachfolgende Aufgabenteile verwendet werden.

Aufgabe 2. Untersuche, ob bzw. für welche Parameter die folgenden Reihen konvergieren:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^n}$ mit $q \in \mathbb{R}$ sowie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$
ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 \cdot (\sin(n\varphi))^n}{3^n}$ mit $\varphi \in [0, 2\pi]$
iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n}$

Aufgabe 3. Zeige: Für jede (nicht notwendigerweise abzählbare) unendliche Menge A ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$, also die Menge aller Teilmengen von A, nicht abzählbar.

Hinweis: Es ist sinnvoll, die beiden Situationen "A abzählbar" bzw. "A nicht abzählbar" getrennt zu behandeln.

Anmerkung: Allgemein kan man zeigen: Für eine beliebige Menge A ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ stets mächtiger als A, d.h. es gibt zwar eine surjektive Abbildung $f : \mathcal{P}(A) \to A$ aber keine surjektive Abbildung $g : A \to \mathcal{P}(A)$ ("Satz von Cantor").

Aufgabe 4. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv durch $x_1 := 1$ sowie

$$x_{n+1} := \frac{ax_n^2 + bx_n + c}{x_n^2 + 1} \qquad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}$$

definiert, wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$.

i) Zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist

ii) Folgere aus i), dass eine beliebige kubische Gleichung

$$\sum\nolimits_{k=0}^{3} c_k x^k = 0, \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad c_3 \neq 0$$

stets mindestens eine Lösung $x \in \mathbb{R}$ besitzt.

Hinweis: Betrachte zunächst den Spezialfall $c_3 = 1$, $c_2 = -a$, $c_1 = 1 - b$ und $c_0 = -c$.