WS 2003/2004 **Blatt 3** 30.10.2003

Dozent: Karl-Theodor Sturm Assistent: Atle Hahn

Analysis I

Aufgabe 1.

i) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $a_1 := 0$, $a_2 := 1$, $a_n := \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$ für $n \geq 3$. Zeige, dass diese Folge konvergiert und bestimme ihren Grenzwert.

ii) Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gegen $b \in \mathbb{R}$. Zeige, dass dann auch die durch

$$c_n := \frac{1}{n}(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

definierte Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen b konvergiert.

Aufgabe 2. Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien gegeben durch

$$a_n := \frac{x^n - n}{x^n + n}, \quad x \in \mathbb{R}_+$$

$$b_n := \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$c_n := \frac{1^p + 2^p + \cdots n^p}{n^{p+1}}, \quad p \in \{1, 2, 3\}$$

Untersuche, für welche Parameter x, k, p diese Folgen konvergieren und bestimme im Konvergenzfall den jeweiligen Grenzwert.

Aufgabe 3. Ein Dedekindscher Schnitt ist ein Paar (A, B) von nichtleeren Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit den beiden Eigenschaften $A \cup B = \mathbb{R}$ sowie $\forall a \in A : \forall b \in B : a \leq b$.

i) Zeige unter Ausnutzung der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$, dass jeder Dedekindsche Schnitt (A, B) die folgende Eigenschaft hat:

$$\exists s \in \mathbb{R} : \forall a \in A : \forall b \in B : \quad a \leq s \leq b$$

ii) Zeige mit Hilfe von Teilaufgabe i), dass zu jedem $x \geq 0$ genau ein $y \geq 0$ mit $y^2 = x$ existiert ("Existenz und Eindeutigkeit der Wurzel").

Bemerkung: Umgekehrt kann man zeigen, dass das Vollständigkeits-Axiom aus den anderen Axiomen der reellen Zahlen folgt, wenn zusätzlich vorausgesetzt wird, dass jeder Dedekindsche Schnitt (A, B) die Eigenschaft aus Teilaufgabe i) besitzt.

Aufgabe 4. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $x_1 := 1$ sowie $x_{n+1} := 1 + \frac{1}{x_n}$ für $n \geq 1$. Zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Hinweis: Bestimme zunächst den einzig möglichen Kandidaten $q \in \mathbb{R}$ für den Grenzwert (Ergebnis: $q = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$). Zeige dann, dass $|x_n - q| \leq \frac{1}{q^n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt.