WS 2003/2004 **Blatt 13** 22.01.2004

Dozent: Karl-Theodor Sturm Assistent: Atle Hahn

Analysis I

Aufgabe 1. i) Zeige, dass die folgende Bedingung hinreichend dafür ist, dass eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex ist:
Zu jedem $y \in \mathbb{R}$ existiert eine Funktion τ der Form $\tau(x) = a+bx$, $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $\tau(y) = f(y)$ und $\forall x \in \mathbb{R} : \tau(x) \le f(x)$ gilt.

Anmerkung: Diese Bedinging ist sogar notwendig für die Konvexität von f (dies braucht aber nicht bewiesen zu werden).

ii) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex. Sei $(x_k)_{k \le n}$, $n \in \mathbb{N}$, eine beliebige Folge reeller Zahlen und $(\lambda_k)_{k \le n}$ eine Folge nicht-negativer Zahlen mit $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$. Zeige, dass dann

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) \ge f\big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\big)$$

gilt.

Aufgabe 2. Zeige: Ist $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und gilt $mg \le g' \le Mg$ für $m, M \in \mathbb{R}$, so folgt

$$g(0)e^{mx} \le g(x) \le g(0)e^{Mx} \quad \text{für jedes } x \ge 0$$

Aufgabe 3. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einer Umgebung von $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar und im Punkt x sogar zweimal differenzierbar.

i) Zeige:

$$\lim_{t \to 0} \frac{g(x+t) + g(x-t) - 2g(x)}{t^2} = g''(x)$$

ii) Folgere aus Teil i): Hat g ein Minimum in x oder ist g konvex, so gilt $g''(x) \ge 0$.

Aufgabe 4. Die sogenannten *Legendre Polynome* $(L_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sind durch

$$L_n(x) := \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\big((x^2-1)^n\big) \qquad \text{für } n\in\mathbb{N}_0$$

definiert.

i) Zeige, dass L_n ein Polynom vom Grad n ist und im offenen Intervall $(-1,1)$ genau n verschiedene Nullstellen hat.

ii) Zeige, dass L_n der folgenden *(Legendreschen) Differentialgleichung* genügt:

$$(1-x^2)L_n''(x) - 2xL_n'(x) + n(n+1)L_n(x) = 0$$

Hinweis für Teil i): Zeige durch vollständige Induktion über $k \leq n$, dass das Polynom $\frac{d^k}{dx^k}\big((x^2-1)^n\big)$ mindestens k verschiedene Nullstellen in $(-1,1)$ besitzt.

Hinweis für Teil ii): Berechne auf zwei verschiedene Weisen die $n+1$-fache Ableitung der Funktion $x \mapsto (x^2-1)\frac{d}{dx}\big((x^2-1)^n\big)$.