WS 2003/2004 **Blatt 12** 15.01.2004

Dozent: Karl-Theodor Sturm   Assistent: Atle Hahn

Analysis I

Aufgabe 1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := \frac{1}{2}x + x^2 \sin(\frac{1}{x})$, $x \neq 0$, und $f(0) := 0$ definiert. Zeige, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, dass $f'(0) > 0$ gilt und dass f auf keiner Umgebung von 0 monoton wachsend ist.

Aufgabe 2. Bestimme die folgenden Grenzwerte:

$$
\begin{array}{ll}
i) & \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x+x^2)-x}{x^2} \\
ii) & \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)-\sin(x)}{x(1-\cos(x))} \\
iii) & \displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log(1+e^x)}{\sqrt{1+x^2}}
\end{array}
$$

Aufgabe 3. Berechne die Ableitungen der folgenden beiden Funktionen (und gebe an, an welchen Stellen sie nicht existiert):

$$f(x) := \log\left(\frac{\sqrt{1-2x}+1}{\sqrt{1+2x}-1}\right) \qquad \text{für } 0 < x \leq \frac{1}{2}$$

$$g(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } x = 0 \\ \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{e^x - 1} & \text{für } 0 < |x| < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Aufgabe 4. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{R} \ni r \mapsto \log\left(\tfrac{r}{\sinh(r)}\right) \in \mathbb{R}$$

konkav ist.