WS 2003/2004 **Blatt 11** 08.01.2004

Dozent: Karl-Theodor Sturm Assistent: Atle Hahn

Analysis I

Aufgabe 1. Es bezeichne $\lfloor x \rfloor$ den ganzzahligen Anteil von $x \in \mathbb{R}$. Zeige:

i) $\lim_{x\to\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1$
ii) Die durch $f(x) := x\lfloor 1/x \rfloor$ für $x \neq 0$ und $f(0) := 1$ definierte Funktion f auf $\mathbb{R}$ ist stetig in 0.
iii) $\mathbb{R} \ni x \mapsto x(x - \lfloor x \rfloor) \in \mathbb{R}$ ist stetig in 0.

Aufgabe 2.

i) Zeige: $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$ und $\lim_{x\downarrow 0} \ln(x) = -\infty$
ii) Zeige: $\lim_{x\downarrow 0} (\ln x)^m x^n = 0$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$.
iii) Berechne $\lim_{x\downarrow 0} x^x$.

Aufgabe 3. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig*, wenn ein $C > 0$ existiert, so dass $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.

i) Zeige, dass jede Lipschitz-stetig Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch stetig ist. Impliziert Lipschitz-Stetigkeit sogar gleichmäßige Stetigkeit?
ii) Zeige, dass die Funktion $\mathbb{R} \ni x \mapsto |x|^{1/k} \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, gleichmäßig stetig ist.
iii) Zeige durch ein Gegenbeispiel, dass nicht jede gleichmäßig stetige Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch Lipschitz-stetig sein muss.

Aufgabe 4.

i) Zeige, dass die Funktion $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv ist und dass die Funktion $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Teilmenge $\mathbb{R}_+$ bijektiv auf $[1, \infty)$ abbildet. Seien $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\operatorname{arcosh} : [1, \infty) \to \mathbb{R}_+$ die zugehörigen Umkehrfunktionen.
ii) Zeige:

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$
$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \text{für } x \in [1, \infty)$$