WS 2003/2004 **Blatt 10** 18.12.2003

Dozent: Karl-Theodor Sturm Assistent: Atle Hahn

Analysis I

Aufgabe 1. Sei $f_{\alpha,\beta} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $\alpha \geq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ durch

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(x^\beta) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

definiert.

i) Zeige, dass $f_{0,-1}$ zwar stetig auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, nicht jedoch im Punkt $x = 0$ ist.
ii) Zeige, dass $f_{1,-1}$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.
iii) Bestimme die Menge aller (α, β) mit $\alpha \geq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, für die $f_{\alpha,\beta}$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

Aufgabe 2. Sei $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, durch

$$g_n(x) = \frac{nx}{1 + |nx|}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

definiert.

i) Zeige, dass g_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.
ii) Zeige, dass $\lim_{n\to\infty} g_n(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert.
iii) Zeige, dass die Funktion $\lim_{n\to\infty} g_n$ nicht stetig ist.

Aufgabe 3. i) Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge reeller Zahlen und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nicht-negativer Zahlen mit der Eigenschaft $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n < \infty$. Definiere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \sum_{n\in\{k\in\mathbb{N}|x_k\leq x\}} a_n, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Zeige, dass f höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen hat.

ii) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Zeige, dass g höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen besitzt. Gebe damit einen neuen Beweis für die Behauptung in Teil i) an.

Aufgabe 4. Sei $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, $n \in \mathbb{N}$, und $c \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Gleichung

$$\frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \cdots + \frac{1}{x-a_n} = c, \qquad x \notin \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

für $c = 0$ genau $n-1$ verschiedene und für $c \neq 0$ sogar genau n verschiedene Lösungen besitzt.