Übungen zur Stochastischen Analysis I
Blatt 9

Prof. K.T. Sturm, WS 2006/2007

13. Dezember 2006

Aufgabe 1

Betrachte die SDG

$$dX_t = \beta(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t,$$

wobei β und σ so gewählt sind, dass eine Lösung existiert. Sei $f \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^n)$ und q beschränkt, stetig und reellwertig auf $\mathbb{R}^n$. Definiere

$$v(t,x) := \mathbb{E}^x[f(X_t)\exp(-\int_0^t q(X_s)ds)].$$

Zeige, dass dann v die Gleichung

$$\frac{\partial v}{\partial t} = Av - qv$$

erfüllt, wobei $A := \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\partial_i\partial_j + \sum_{i=1}^n b_i\partial_i$ und $a = \sigma\sigma^T$.

Aufgabe 2

a) Sei $u(t,x) = (u_1(t,x),\ldots,u_n(t,x))$ eine $\mathbb{R}^n$-wertige Funktion aus $\mathcal{C}^2([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ für die auf $[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}u_i(t,x) = b_i(t,u(t,x)), \quad \frac{\partial}{\partial x_j}u_i(t,x) = \sigma_{ij}(t,u(t,x)); \quad 1 \le i,j \le n.$$

Hierbei ist jedes $b_i(t,x)$ stetig und jedes σ_{ij} aus $\mathcal{C}^2([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$. Sei W eine d-dimensionale Brownsche Bewegung. Zeige, dass der Prozess

$$X_t := u(t,W_t); \quad 0 \le t < \infty$$

die Stratonovich-Gleichung

$$dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)\circ dW_t$$

löst.

b) Bestimme mit Hilfe von Aufgabenteil a) die eindeutige starke Lösung der eindimensionalen Itô-Gleichung

$$dX_t = \left[\frac{2}{1+t}X_t - a(1+t)^2\right]dt + a(1+t)^2dW_t; \quad 0 \le t < \infty.$$

Aufgabe 3

Sei W_t eine eindimensionale Brownsche Bewegung. Löse explizit die SDG

$$dX_t = \sqrt{1+X_t^2}dB_t + \frac{X_t}{2}dt$$

Aufgabe 4

Betrachte die eindimensionale SDG

$$dX_t = \frac{b - X_t}{T - t} dt + W_t \qquad X_0 = a.$$

Hierbei seien a, b beliebige reele Zahlen.

a) Zeige, dass für $0 \leq t \leq T$ der Prozess

$$X_t^{a,b} = a\left(1 - \frac{t}{T}\right) b\frac{t}{T} + (T - t) \int_0^t \frac{dW_s}{T - s}$$

eine Lösung der SDG ist.

b) Berechne $\mathbb{E} X_t^{a,b}, \operatorname{cov}(X_s^{a,b}, X_t^{a,b})$. Was passiert für $t \uparrow T$?

c) Zeige, dass die endlich dimensionalen Verteilungen des Prozesses $X_t^{a,b}$ gegeben sind durch

$$\mathbb{P}\left[X_{t_1}^{a,b} \in dx_1, \ldots, X_{t_n}^{a,b} \in dx_n\right] = \left(\prod_{i=1}^n p_{t_i - t_{i-1}}(x_{i-1,x_i})\right) \frac{p_{T-t_n}(x_n, b)}{p_T(a, b)} dx_1 \ldots dx_n$$

wobei $p_t(x, y)$ die Brownsche Übergangsdichte bezeichne.
Anleitung: Mit einem ähnlichen Argument wie in Aufgabe 3 auf Blatt 5 kann man sich überlegen, dass die endlich dimensionalen Verteilungen Normalverteilt sind. Die Verteilung ist dann eindeutig über die Erwartungen und die Kovarianzen gegeben. Wenn man die Dichten hinschreibt und etwas umformt, kommt man auf das Ergebnis.

d) Folgere, dass für alle $\mathcal{F}_T$ messbaren Mengen A

$$\mathbb{W}^a(A) = \int_{\mathbb{R}} P[X^{a,b} \in A] p_T(a, b) db.$$

Hierbei bezeichnet $\mathbb{W}(A)$ die Verteilung einer Brownschen Bewegung mit Startpunkt a. Die Verteilung der Brownsche Brücke $X_t^{a,b}$ ist also eine Version der bedingten Wahrscheinlichkeit der Brownschen Bewegung bedingt auf $B_T = b$.