Übungen zur Stochastischen Analysis I
Blatt 8

Prof. K.T. Sturm, WS 2006/2007

7. Dezember 2006

Aufgabe 1

Ziel dieser Aufgabe, ist zu zeigen, dass die Brownsche Bewegung $B = (B_t)_{t\geq 0}$ mit Startpunkt $x \neq 0$ in Dimension $d \geq 2$ fast sicher nie den Ursprung trifft.
Sei dafür $d = 2$. Setze $T = \inf\Big\{t \geq 0 : \quad |B_t| \notin]\frac{1}{k}^k, k[\Big\}$. Zeige, dass $\log |B|_{T\wedge n} = \log |x| + \int_0^{T\wedge n} \frac{1}{|B_s|} dB_s$. Berechne $\mathbb{P}[|B_T| = \frac{1}{k}^k]$ und folgere die Aussage.

Aufgabe 2

Löse folgende eindimensionale stochastische Differentialgleichung

$$dN_t = rN_t dt + \alpha N_t dB_t,$$

wobei α konstant und N_0 gegeben sei.

Aufgabe 3

Zeige, dass die eindeutige Lösung der linearen stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = [A(t)X_t + a(t)]dt + \sigma(t)dW_t \qquad X_0 = \xi$$

gegeben wird durch

$$X_t = \varphi(t) \cdot \Big(\xi + \int_0^t \varphi^{-1}(s)a(s)ds + \int_0^t \varphi^{-1}(s)\sigma(s)dW_s\Big); \quad 0 \leq t < \infty.$$

Dabei ist $\varphi(t)$ die eindeutig bestimmte Lösung des deterministischen Systems

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = A(t)\varphi(t) \qquad \varphi(0) = Id$$

Hierbei ist W eine $r-$dimensionale Brownsche Bewegung, die unabhängig von dem d-dimensionalen Anfangsvektor ξ ist, und die $(d \times d)$, $(d \times 1)$ und $(d \times r)$ Matrizen $A(t)$, $a(t)$ und $\sigma(t)$ sind deterministisch, messbar und lokal beschränkt.

Aufgabe 4

Wir übernehmen die Bezeichnungen aus Aufgabe 3 und nehmen an, dass $\xi \in L^2$. Wir setzen

$$m_t = E[X_t] \qquad V(t) = \text{var}(X_t).$$

a) Zeige, dass gilt

$$m(t) = \varphi(t)\left[m(0) + \int_0^t \varphi^{-1}(s)a(s)ds\right]$$

und

$$V(t) = \varphi(t)\left[V(0) + \int_0^t \varphi^{-1}(s)\sigma(s)(\varphi^{-1}(s)\sigma(s))^T ds\right]\varphi(t)^T$$

b) Zeige, dass m und V die folgenden Differentialgleichungen erfüllen:

$$\dot{m}(t) = A(t)m(t) + a(t)$$
$$\dot{V}(t) = A(t)V(t) + V(t)A^T(t) + \sigma(t)\sigma(t)^T$$