Übungen zur Stochastischen Analysis I
Blatt 7

Prof. K.T. Sturm, WS 2006/2007

27. November 2006

Aufgabe 1

Sei W_t eine eindimensionale Brownsche Bewegung mit Startpunkt 0. Zeige, dass der Prozess $Y_t = \sin(W_t) + \frac{1}{2}\int_0^t \sin(W_t)dt$ ein Martingal ist. Berechne $\mathbb{E}Y_t$ und $\mathrm{var}(Y_t)$.

Aufgabe 2

Für ein stetiges Semimartingal X mit $X_0 = 0$ bezeichne $\mathcal{E}(X)_t = \exp(X_t - \frac{1}{2}\langle X\rangle)$ das exponentielle Semimartingal. Zeige die folgenden Eigenschaften:

a) $\mathcal{E}(X)_t\mathcal{E}(Y)_t = \mathcal{E}(X + Y + \langle X, Y\rangle)_t$

b) $(\mathcal{E}(X)_t)^{-1} = \mathcal{E}(-X + \langle X\rangle)_t$

Aufgabe 3

Für $n = 0, 1, 2\dots$ definieren wir folgende Polynome

$$H_n(x,y) := \frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}\exp\left(\alpha x - \frac{1}{2}\alpha^2 y\right)\Big|_{\alpha=0}; \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Zeige, dass für diese gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x}H_n(x,y) = nH_{n-1}(x,y); \quad n = 1, 2, \dots$$

und

$$\frac{\partial}{\partial y}H_n(x,y) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} = 0; \quad n = 0, 1, \dots$$

b) Zeige, dass für jedes stetige, lokale Martingal M mit $M_0 = 0$ fast sicher gilt:

$$\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-1}} dM_{t_n}\dots dM_{t_2}dM_{t_1} = \frac{1}{n!}H_n(M_t, \langle M\rangle_t)$$

und

$$\exp\left(\alpha M_1 - \frac{\alpha^2}{2}\langle M\rangle_t\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}H_n(M_t, \langle M\rangle_t).$$

Aufgabe 4

a) Sei $W_t = (W_t^{(1)}, \dots, W_t^{(n)})$ eine n-dimensionale Brownsche Bewegung, die in 0 startet. Sei Q eine orthogonale $(n \times n)$-Matrix. Zeige, dass $\widetilde{W}_t := QW_t$ ebenfalls eine n-dimensionale Brownsche Bewegung ist.

b) Sei W eine eindimensionale Brownsche Bewegung. Zeige, dass der Prozess

$$X_t = \int_0^t \mathrm{sign}(W_t)dW_t$$

eine Brownsche Bewegung ist.