Übungen zur Stochastischen Analysis I
Blatt 6

Prof. K.T. Sturm, WS 2006/2007

21. November 2006

Aufgabe 1

Sei $f = u+iv$ eine holomorphe Funktion und $Z = (X, Y)$ eine zwei-dimensionale Brownsche Bewegung. Sei $U_t := u(Z_t)$ und $V_t := v(Z_t)$.
Berechne $\langle U \rangle_t$, $\langle V \rangle_t$ und $\langle U, V \rangle_t$.

Aufgabe 2

In dieser und der nächsten Aufgabe, darf vorausgesetzt werden, dass für eine Brownsche Bewegung $B = (B_t)_{t \geq 0}$ mit Startpunkt $x \neq 0$ in Dimension $d \geq 2$ gilt $\mathbb{P}[B_t \neq 0, \forall t \geq 0] = 1$.
Sei nun $d = 3$:

a) Zeige $X_t = \frac{1}{|B_t|}$ ist ein lokales Martingal.

b) Die Familie $(X_t)_{t \geq 0}$ besitzt keine integrierbare Majorante.

c) Die Familie $(X_t)_{t \geq 0}$ ist beschränkt in L^2 und somit gleichgradig integrierbar.

d) Es gilt $\lim_{t \to \infty} \mathbb{E} X_t = 0$. Folgere, dass X_t kein Martingal ist. Folgere außerdem, dass der Betrag eine Brownschen Bewegung für $d \geq 3$ fast sicher gegen $+\infty$ konvergiert.

Aufgabe 3

Betrachte wieder eine Brownsche Bewegung $B = (B_t)_{t \geq 0}$ in $\mathbb{R}^d$ mit Startpunkt $x \neq 0$. Sei für $a > 0$ die Stoppzeit $T_a := \inf\{t : |B_t| = a\}$.

a) Sei $d = 2$. Zeige, dass der Prozess $\log |B_t|$ ein lokales Martingal ist. Zeige, dass für $0 < r < |x| < R$

$$\mathbb{P}[T_R < T_r] = \frac{\log |x| - \log |r|}{\log R - \log r}.$$

Was ist $\mathbb{P}[T_r < \infty]$?

b) Betrachte nun den Fall $d \geq 3$. Berechne mit Hilfe des Prozess $|B_t|^{2-d}$ die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}[T_R < T_r]$ und $\mathbb{P}[T_r < \infty]$.

Aufgabe 4

Für stetige Semimartingale X und Y ist das Stratonovich-Integral definiert durch

$$\int_0^t Y_s \circ dX_s := \int_0^t Y_s dX_s + \frac{1}{2} \langle X, Y \rangle; \quad 0 \leq t < \infty.$$

Zeige folgende Aussagen:

a) $d(XY)_t = X_t \circ dY_t + Y_t \circ dX_t$ (Produktregel)

b) Für $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^d, R)$ gilt:

$$df(X_t) = \nabla f(X_t) \circ dX_t \qquad \text{(Kettenregel)}$$