Übungen zur Stochastischen Analysis I
Blatt 5

Prof. K.T. Sturm, WS 2006/2007

14. November 2006

Aufgabe 1

a) Sei $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$. Zeige, dass das Lebesgue-Stieltjes-Integral $\int_0^t f(s)dg(s)$ ein gewöhnliches Lebesgue-Integral $\int_0^t f(s)g'(s)ds$ mit der Dichte g' ist.

b) Berechne folgende Stieltjes-Integrale:

(i) $\int_0^T \sin(x)d\cos(x) + \cos(x)d\sin(x)$

(ii) $\int_0^{10} \mathbf{1}_{[1,y]}(x)d|x-2|$

(iii) $\int_0^{10} |x-2|d\mathbf{1}_{[1,y]}(x)$

Aufgabe 2

Seien $t \mapsto A_t$ und $t \mapsto B_t$ zwei Funktionen mit beschränkter Variation. Zeige, dass dann für alle t gilt

$$A_tB_t = A_0B_0 + \int_0^t A_s dB_s + \int_0^t B_{s-}dA_s.$$

Hierbei bezeichnet $B_{s-} := \lim_{t\uparrow s} B_t$.

Aufgabe 3

Sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Zeige für

$$A_m = \sqrt{2}\int_0^1 \cos(2\pi mt)dX_t \qquad B_m = \sqrt{2}\int_0^1 \sin(2\pi mt)dX_t \quad m \geq 1:$$

a) Die A_m und B_m sind $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt für $m \geq 1$.
(Man zeige hierfür, dass der L^2-Limes normalverteilter Zufallsvariablen wieder normalverteilt ist.)

b) Die $(A_m, B_m)_{m\geq 1}$ sind unkorreliert.

Aufgabe 4

Sei B eine standard Brownsche Bewegung, $\varepsilon \in [0,1]$ und $\Pi = \{t_o, t_1, \ldots, t_m\}$ eine Parition von $[0,t]$ mit $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$. Definiere

$$S_\varepsilon(\Pi) := \sum_{i=1}^{m-1} [(1-\varepsilon)B_{t_i} + \varepsilon B_{t_{i+1}}](B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

Zeige, dass für den L^2-Limes gilt

$$\lim_{||\Pi||\to 0} S_\varepsilon(\Pi) = \frac{1}{2}B_t^2 + (\varepsilon - \frac{1}{2})t.$$