Übungen zur Stochastischen Analysis I
Blatt 4

Prof. K.T. Sturm, WS 2006/2007

7. November 2006

Aufgabe 1

Auf einem vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine rechtsstetige und vollständige Filtration. Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ ein Wiener-Prozess bezüglich $\mathcal{F}$ und Y_0 eine von $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t)$ unabhängige Cauchy-verteilte Zufallsvariable. Für jedes $t \geq 0$ sei $\mathcal{G}_t = \sigma(\mathcal{F}_t \cup \sigma(Y_0))$. Zeige, dass $(Y_0 W_t)_{t\geq 0}$ ein lokales Martingal bezüglich $\mathcal{G}^+$ aber kein Martingal bezüglich $\mathcal{G}^+$ ist.

Aufgabe 2

Sei X ein stetiger, zentrierter und quadrat-integrierbarer Prozess mit stationären und unabhängigen Zuwächsen. Sei $(\mathcal{F}_t)_t$ die von X erzeugte Filtration. Zeige

$$\langle X \rangle_t = t\, \mathbb{E} X_1^2, \quad t \geq 0.$$

Aufgabe 3

Sei $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$, $0 = t_0 \leq t_1 \cdots \leq t_m = t$, eine Partition des Intervalls $[0, t]$ und $\|\Pi\| = \max_{1\leq k\leq m} |t_k - t_{k-1}|$ die Feinheit der Partition. Definiere die p-te Variation ($p > 0$) eines Prozesses X über der Partition Π durch

$$V_t^{(p)}(\Pi) = \sum_{k=1}^{m} |X_{t_k} - X_{t_{k-1}}|^p.$$

Sei $\{X_t, \mathcal{F}_t, 0 \leq t < \infty\}$ ein stetiger Prozess mit der Eigenschaft, dass für jedes feste $t > 0$ und für ein $p > 0$

$$\lim_{\|\Pi\|\to 0} V_t^{(p)}(\Pi) = L_t \quad (\textit{stochastisch}),$$

wobei L_t eine Zufallsvariable ist, die fast sicher Werte in $[0, \infty]$ annimmt. Zeige, dass $\lim_{\|\Pi\|\to 0} V_t^{(q)}(\Pi) = \infty$ auf $\{L_t > 0\}$ für $0 < q < p$ gilt, sowie dass auf $\{L_t < \infty\}$ und für $q > p$ gilt $\lim_{\|\Pi\|\to 0} V_t^{(q)}(\Pi) = 0$.

Aufgabe 4

Sei M ein stetiges, lokales Martingal. Zeige:

a) Für fast alle ω gilt:

$$M_t(\omega) = M_a(\omega) \text{ für } a \leq t \leq b \quad \iff \quad \langle M \rangle_b(\omega) = \langle M \rangle_a(\omega).$$

b) Für fast alle ω mit $\langle M \rangle_\infty := \sup_t \langle M \rangle_t < \infty$ existiert $\lim_{t \to \infty} M_t$ und ist endlich.