Übungen zur Stochastischen Analysis I
Blatt 3

Prof. K.T. Sturm, WS 2006/2007

2. November 2006

Aufgabe 1

Sei $X = (X_n)_{n \in -\mathbb{N}_0}$ ein Martingal bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in -\mathbb{N}_0}$ (X wird dann auch *rückläufiges Martingal* genannt). Zeige:

a) Ein rückläufiges Martingal ist stets gleichgradig integrierbar.

b) Falls X ein rückläufiges Martingal ist, dann existiert $X_{-\infty} = \lim_{n\to\infty} X_{-n}$ fast sicher und in L^1. Es gilt $X_{-\infty} = \mathbb{E}[X_0 \mid \mathcal{F}_{-\infty}]$, wobei $\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{-n}$.

Aufgabe 2

Seien ξ_j, $0 \le j \le n$, unabhängig, identisch verteilte, $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariablen und sei $S_k := \sum_{j=1}^{k} \xi_j$. Zeige

$$\mathbb{P}[S_j < j, 1 \le j \le n \mid S_n] = (1 - S_n/n)^+.$$

Tipp: Zeige zunächst, dass die Gleichung auf der Menge $\{S_n \ge n\}$ gilt. Betrachte dann das rückläufige Martingal $X_{-j} := S_j/j$, $j = 1, \ldots, n$, bezüglich der der Filtration $\mathcal{F}_{-j} := \sigma(S_j, \ldots, S_n)$ und die Stoppzeit $T := \inf\{k \ge -n : X_k \ge 1\}$, wobei $T := -1$, falls die Menge leer ist.

Aufgabe 3

Sei $(M_t)_{t\ge 0}$ ein stetiges Martingal auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}, \mathbb{P})$ mit

$$\mathbb{P}\Big(\sup_t M_t = +\infty, \inf_t M_t = -\infty\Big) = 1.$$

Definiere $T(0) = 0$ und für $n \ge 1$ $T(n) = \inf\{t > T(n-1) : |M_t - M_{T(n-1)}| = 1\}$. Zeige dann, dass der (diskrete) Prozess $(M_{T(n)}; n \in \mathbb{N})$ ein gewöhnlicher Random Walk ist.

Aufgabe 4

a) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\ge 0})$ ein messbarer Raum mit Filtration. Seien $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{F})$ derart, dass für alle t die Einschränkung von $\mathbb{Q}$ auf $\mathcal{F}_t$ absolutstetig bezüglich der entsprechenden Einschränkung von $\mathbb{P}$ sei (Achtung, das ist eine echt schwächere Forderung als die Absolutstetigkeit von $\mathbb{Q}$ bezüglich $\mathbb{P}$). Bezeichne mit

$$M_t = \left(\frac{d\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}} \right)$$

die Radon-Nikodym-Dichte von $\mathbb{Q}$ bezüglich $\mathbb{P}$ auf $\mathcal{F}_t$. Zeige, dass M_t ein Martingal bezüglich $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}, \mathbb{P})$ ist.

b) Sei jetzt $\Omega = C[0, \infty)$ der Raum der stetigen Funktionen auf der Halblinie und $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}_t$ wie üblich von den Auswertungen $X_t : \omega \mapsto \omega(t)$ erzeugt. Sei $\mathbb{P}$ das Wienermaß, das heißt das Maß unter dem X_t eine Brownsche Bewegung mit Startwert 0 ist. Sei $\mathbb{Q}$ die Verteilung einer Brownschen Bewegung mit Drift c. Das heißt $X_t - ct$ ist eine Brownsche Bewegung mit Startwert 0 unter $\mathbb{Q}$. Zeige, dass in diesem Fall gilt

$$\left(\frac{d\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}} \right) = \exp(cX_t - \frac{1}{2}c^2 t).$$

M_t ist also eine exponentielle Brownsche Bewegung.

c) Ist in diesem Fall $\mathbb{Q}$ absolutstetig bezüglich $\mathbb{P}$?