Übungen zur Stochastischen Analysis I
Blatt 2

Prof. K.T. Sturm, WS 2006/2007

25. Oktober 2006

Aufgabe 1

Sei B die n-dimensionale standard Brownsche Bewegung.

a) Zeige, dass für eine Stoppzeit T mit $\mathbb{E}[T] < \infty$ gilt:

   (i) $\mathbb{E}[B_T] = 0$

   (ii) $\mathbb{E}[B_T^2] = n\mathbb{E}[T]$

b) Sei $r > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $T_{r,x} := \inf\{t \geq 0 : |B_t - x| \geq r\}$. Zeige

$$\mathbb{E}[T_{r,x}] = \begin{cases} \frac{r^2 - |x|^2}{d} & \text{für } |x| < r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 2

Seien $a > 0$ und $b > 0$ und sei $T_{a,b} := \inf\{t \geq 0 : B_t = -a \text{ oder } X_t = b\} = T_{-a} \wedge T_b$, wobei B die eindimensionale standard BB ist.
Definiere $X_t := \sinh(\vartheta(B_t + a)) \exp(-\frac{\vartheta^2}{2}t)$.

a) Zeige, dass X_t ein Martingal ist.

b) Zeige

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda T_{a,b}}] = \frac{\cosh(\frac{a-b}{2}\sqrt{2\lambda})}{\cosh(\frac{a+b}{2}\sqrt{2\lambda})}, \quad \lambda \geq 0.$$

c) Bestimme die Verteilung von $\sup_{0 \leq t \leq T_{-1}} B_t$.

Aufgabe 3

Seien $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unabhängige $\exp(\lambda)$-verteilte Zufallsvariablen, das heißt

$$\mathbb{P}\big[T_i \in [a,b]\big] = \int_a^b \lambda \exp(-\lambda x) dx.$$

Sei außerdem $S_n = \sum_{i=0}^n T_i$ und für $t \geq 0$

$$N_t = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{\{S_n < \ t\}}$$

a) Zeige, dass für $t_1 < \ldots < t_n$ die Zufallsvariablen $(N_{t_i} - N_{t_{i-1}})$ unabhängig und poisson-verteilt mit Parameter $\lambda(t_i - t_{i-1})$ sind. (Um die Rechnung übersichtlicher zu gestalten, kann man sich auf den Fall $n = 2$ von zwei Zufallsvariablen beschränken.) N_t ist also eine càdlàg-Realisierung eines Prozesses zur Poisson-Faltungshalbgruppe.

b) Zeige, dass $(N_t - \lambda t)_{t \geq 0}$ ein Martingal ist.

c) Zeige, dass $((N_t - \lambda t)^2 - \lambda t)_{t \geq 0}$ ein Martingal ist.

Aufgabe 4

Sei X ein stetiger, in 0 startender Prozess, so dass für jedes reelle α der Prozess

$$M_t := \exp(\alpha X_t - \frac{\alpha^2}{2} t)$$

ein Martingal bzgl. der Filtration $(\mathcal{F}_t)$ ist. Zeige, dass dann X eine Brownsche Bewegung ist.
(Hierbei kann die Eigenschaft ausgenutzt werden, dass eine Zufallsvariable genau dann $\nu(0,1)$-verteilt ist, falls $\mathbb{E}[e^{\lambda X}] = e^{\lambda^2/2}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.)