Übungen zur Stochastischen Analysis I
Blatt 14

Prof. K.T. Sturm, WS 2006/2007

30. Januar 2007

Aufgabe 1

Sei (B_t) eine Brownsche Bewegung, t ein fester Zeitpunkt und φ eine beschränkte messbare Funktion auf $\mathbb{R}$. Definiere $F = \exp\left(\int_0^t \varphi(B_s)ds\right)$. Finde einen Prozess (A_s) und eine Konstante c, derart dass

$$F = c + \int_0^t A_s dB_s.$$

Aufgabe 2

Sei (B_t) eine Brownsche Bewegung und $\mathcal{F}_t^B$ die (augmentierte) Brownsche Filtration. Sei $\beta_t = \int_0^t \operatorname{sign}(B_s)dB_s$. Dann ist (β_t) auch eine $\mathcal{F}_t^B$-Brownsche Bewegung. Zeige, dass sich B_t NICHT als $c + \int_0^t A_s d\beta_s$ darstellen lässt.
Hinweis: Es darf ohne Beweis verwandt werden, dass $\beta_t = |B_t| + L_t^X(0)$, wobei $L_t^X(0)$ (die Lokalzeit in 0) eine bezüglich der von $(|B_t|)$ erzeugten Filtration messbare Zufallsvariable ist.

Aufgabe 3

Gegeben sei ein Finanzmarkt mit zwei Anlagemöglichkeiten: S^0 folgt einer deterministischen Dynamik $dS_t^0 = S_t^0 r_t dt$ (das Bankkonto) und S^1 sei eine Lösung der SDG $dS_t^1 = S_t^1 \left(b_t dt + \sigma_t dB_t\right)$ (eine Aktie). Hierbei seien σ_t (die Volatilität), r_t (der Zinssatz) und b_t (der Drift auf dem Aktienmarkt) deterministische lipschitzstetige Funktionen. Wir nehmen an, dass σ_t nie verschwindet.

Das Vermögen X_t eines Anlegers folgt dann der Dynamik

$$dX_t = X_t\big(r_t dt + \pi_t \left(b_t - r_t\right) dt + \sigma_t \pi_t dB_t\big),$$

wobei $\pi_t \in [0,1]$ der Anteil seines Kapitals sei, der zum Zeitpunkt t in S^1 investiert ist.

a) Zeige, dass es ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ gibt unter dem gilt

$$dS_t^1 = S_t^1(r_t dt + \sigma_t d\widetilde{B}_t)$$

mit einer $\mathbb{Q}$-Brownschen Bewegung $\widetilde{B}_t$.

b) Setze $R_t = \exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right)$. Zeige, dass $R_t X_t$ unter $\mathbb{Q}$ ein lokales Martingal ist.

c) Sei $\theta_t = \frac{b_t - r_t}{\sigma_t}$ und H eine Lösung der Gleichung $dH_t = -H_t\left(r_t dt + \theta_t dB_t\right), H_0 = 1$. Zeige, dass der Prozess $H_t X_t$ ein lokales Martingal unter $\mathbb{P}$ ist.

d) Wir nehmen an, dass $H_t X_t$ für jede Anlagestrategie π_t sogar eine echtes Martingal ist. Der Anleger wünscht, dass sein Guthaben X_T zu einem festen Zeitpunkt T eine bestimmte Zufallsvariable ξ ist. Zeige, dass durch ξ sowohl sein Einsatz als auch seine Anlagestrategie eindeutig bestimmt sind.

Aufgabe 4

Schöne Ferien!