Übungen zur Stochastischen Analysis I
Blatt 13

Prof. K.T. Sturm, WS 2006/2007

24. Januar 2007

Aufgabe 1

Sei B_t eine 1-dimensionale Brownsche Bewegung mit Startpunkt 0 und $X_t = B_t + \gamma t$ für eine Konstante $\gamma \in \mathbb{R}$ eine Brownsche Bewegung mit Drift. Sei $T_b = \inf\{t \geq 0 : X_t = b\}$ mit $b \in \mathbb{R}$.

a) Berechne für $t > 0$ die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[T_b \leq t]$. Was ergibt sich für $\mathbb{P}[T_b < \infty]$?

b) Berechne die Verteilung von $\sup_{0 \leq s \leq t} X_s$.

Aufgabe 2

Sei B_t eine 1-dimensionale Brownsche Bewegung mit Startpunkt 0.

a) Zeige, dass die Stoppzeit
$$T := \inf\{t : B_t^2 = 1 - t\}$$
fast sicher endlich ist.

b) Setze $H_s = -\frac{2}{(1-s)^2} B_s \mathbf{1}_{\{T \geq s\}}$ und zeige, dass für $t \in [0,1]$ fast sicher gilt
$$\int_0^t H_s^2 ds < \infty.$$

c) Setze $M_t = \int_0^t H_s dB_s$. Zeige, dass fast sicher gilt $M_1 - \frac{1}{2}\langle M\rangle_1 \leq -1$.

d) Zeige, dass $[\mathcal{E}(M)_1] < 1$ und folglich $\mathcal{E}(M)_1$ kein Martingal ist.

Aufgabe 3

Sei $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ eine stetige, monoton wachsende Funktion mit $a(0) = 0$. Sei $S := a(\infty) \leq \infty$ und für $0 \leq s < \infty$ sei
$$a^*(s) := \begin{cases} \inf\{t \geq 0 \ : \ a(t) < s\} & \text{für } 0 \leq s < S \\ \infty & \text{für } s \geq S \end{cases}$$
Zeige, dass für $a^* : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ folgende Aussagen gelten:

a) a^* ist monoton wachsend und rechtsstetig auf $[0, S)$ mit Werten in $[0, \infty)$. Falls $a(t) < S$ für alle $t \geq 0$, dann ist $\lim_{s \nearrow S} a^*(s) = \infty$.

b) $a(a^*(s)) = s \wedge S$ für $0 \leq s < \infty$.

c) Sei $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft
$$a(t_1) = a(t) \text{ für ein } 0 \leq t_1 < t \quad \Rightarrow \quad \varphi(t_1) = \varphi(t).$$
Dann ist $\varphi(a^*(s))$ stetig für $0 \leq s < S$ und $\varphi(a^*(a(t))) = \varphi(t)$ für $0 \leq t < \infty$.

d) Betrachte a auf dem Intervall $[x, y]$. Sei A von endlicher Variation. Dann gilt, falls f eine nicht-negative Borel-meßbare Funktion auf $[a(x), a(y)]$ ist, dass
$$\int_x^y f(a(s)) dA_{a(s)} = \int_{a(x)}^{a(y)} f(t) dA_t.$$

Aufgabe 4

Sei M ein lokales Martingal mit $\langle M\rangle_\infty = \infty$ fast sicher. Zeige, dass dann fast sicher gilt
$$\limsup_{t \to \infty} \frac{M_t}{\sqrt{2\langle M\rangle_t \log\log\langle M\rangle_t}} = 1.$$