Übungen zur Stochastischen Analysis I
Blatt 12

Prof. K.T. Sturm, WS 2006/2007

17. Januar 2007

Aufgabe 1

Wir übernehmen die Voraussetzungen von Aufgabe 4 des elften Übungsblattes.
Sei $s \in \mathcal{C}^2(]l, r[)$ eine Skalierungsfunktion für X.

a) Zeige, dass $Y := s(X)$ die Differentialgleichung

$$dY_t = \tilde{\sigma}(Y)d\tilde{W}_t, \quad Y_0 = s(x)$$

löst, wobei $\tilde{\sigma} := (\sigma \cdot s') \circ s^{-1}$ und $\tilde{W}$ eine Brownsche Bewegung ist.

b) Für $l < y < x < z < r$ zeige, dass

$$\mathbb{P}[T_y^x < T_z^x] = \frac{s(z) - s(x)}{s(z) - s(y)},$$

wobei $T_y^x := \inf\{t \geq 0 \ : \ X_t = y, \ X_0 = x\}$.

Aufgabe 2

Wir betrachten die folgenden Maßtransformationen für zeitdiskrete Prozesse:

a) Der gewöhnliche random walk mit drift: Betrachte auf dem Folgenraum $\{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ die Produktmaße $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ mit $\mathbb{P}(\omega_i = 1) = p \in (0, 1)$ und $\mathbb{Q}(\omega_i = 1) = q \in (0, 1)$. Sei außerdem $\mathcal{F}_n$ die von den ersten n Koordinaten erzeugte Sigma-Algebra. Zeige, dass für jedes n die Einschränkung von $\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_n}$ absolutstetig bezüglich $\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_n}$ ist. Berechne die Radon-Nikodym Dichte. Zeige außerdem, dass $\mathbb{P}$ für $p \neq q$ nicht absolutstetig bezüglich $\mathbb{Q}$ ist

b) Seien $N_1, \ldots, N_n$ unabhängige $\mathcal{N}(0, 1)$-verteilte Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $\mu \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Definiere ein weiteres Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ durch

$$\mathbb{Q}(d\omega) = \exp\left[\sum_{i=1}^{n} \mu_i N_i(\omega) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2\right] \mathbb{P}(d\omega).$$

Charakterisiere die Verteilung der N_i unter $\mathbb{Q}$. Was hat das mit dem Satz von Girsanov zu tun?

Aufgabe 3

Sei X eine Lösung der eindimensionalen SDE $dX_t = \mu dt + \sigma dB_t$ mit Konstanten μ und σ und Startwert x. Sei h eine C^1-Funktion, derart, dass $h(X_t)$ ein positives Martingal ist. Definiere weiter $d\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_t} = \frac{h(X_t)}{h(x)} d\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_t}$. Sei M ein $\mathbb{P}$-Martingal. Zeige, dass dann $M_t - \int_0^t \frac{h'(X_s)}{h(X_s)} d\langle M, X\rangle_s$ ein $\mathbb{Q}$-Martingal ist.

Aufgabe 4

Wir betrachten Prozesse auf einem endlichen Zeitinterval $[0, T]$. Sei $(\theta_t)_{t\in[0,T]}$ ein stetiger adaptierter beschränkter Prozess und $L_t = \exp\left[\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right]$. Sei $\mathbb{Q}$ das Maß auf $\mathcal{F}_T$, dass gegeben ist durch $d\mathbb{Q} = L_T d\mathbb{P}$. Sei $(\phi_t)_{t\in[0,T]}$ ein weiterer adaptierter beschränkter stetiger Prozess und $M_t = \int_{0,t} \phi_s dB_s - \int_0^t \theta_s \phi_s ds$. Zeige, dass M_t ein $\mathbb{Q}$ Martingal ist. Setze $Z_t = M_t L_t$. Berechne dZ_z und zeige, dass Z_t ein $\mathbb{P}$-Martingal ist.