Übungen zur Stochastischen Analysis I
Blatt 11

Prof. K.T. Sturm, WS 2006/2007

9. Januar 2007

Aufgabe 1

Sei B_t eine Brownsche Bewegung. Zeige, dass B_t^2 eine schwache Lösung der folgenden SDG ist

$$dX_t = dt + 2\sqrt{|X_t|}d\tilde{B}_t.$$

Aufgabe 2

Betrachte die Einheitssphäre $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ mit Polarkoordinaten θ, φ mit $-\pi < \theta \leq \pi$, $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$. Sei P die Gleichverteilung auf $\mathbb{S}^2$, das heißt das normalisierte Oberflächenmaß.

a) Beschreibe die gemeinsame Verteilungen der Zufallsvariablen θ, φ unter P.

b) Berechne die bedingte Verteilung von θ gegeben φ.

c) Berechne die bedingte Verteilung von φ gegeben θ.

d) Das Maß P ist invariant unter Rotationen, d.h unabhängig von der Wahl der Koordinaten von $\mathbb{R}^3$. Ist das ein Widerspruch?

Aufgabe 3

Sei B_t eine Brownsche Bewegung.

a) Zeige, dass die SDG

$$dX_t = 3X_t^{1/3}dt + 3X_t^{2/3}dB_t; \quad X_0 = 0$$

überabzählbar viele Lösungen der Form

$$X_t^a = \begin{cases} 0 & ,0 \leq t \leq \tau_0^a \\ B_t^3 & ,\tau_0^a \leq t < \infty \end{cases}$$

mit $\tau_0^a = \inf\{t \geq a \ : \ B_t = 0\},\ a \geq 0$ hat.

b) Zeige, dass die Lösung der SDG

$$dX_t = X_t(1 + X_t^2)dt + (1 + X_t^2)dB_t; \quad X_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$$

in endlicher Zeit gegen $\pm\infty$ explodiert.

Aufgabe 4

Für $-\infty \leq l < r \leq +\infty$ betrachte man auf $]l, r[$ die eindimensionale stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \quad X_0 = x \in]l, r[$$

mit einer eindimensionalen Brownschen Bewegung B. Dabei seien b, σ und $\frac{1}{\sigma^2}$ Borel-messbare, in $]l, r[$ lokal beschränkte Funktion.

Eine streng monoton wachsende Funktion $s :]l, r[\to \mathbb{R}$ heißt Skalierungsfunktion von X, falls $s(X) - s(X_0)$ ein lokales Martingal ist. Dann gilt:

a) Jede nicht konstante Lösung der DGL

$$\frac{1}{2}\sigma^2 s'' + bs' = 0 \text{ auf }]l, r[\tag{1}$$

ist entweder streng wachsend oder fallend. Die Funktion s oder $-s$ ist eine Skalierungsfunktion für X.

b) Ist $s \in \mathcal{C}^2(]l, r[)$ eine Skalierungsfunktion für X, so löst sie die Gleichung (1).

c) Zeige, dass zu $x_0 \in]l, r[$ die Funktion

$$s(y) := \int_{x_0}^{y} \exp(-2 \int_{x_0}^{t} \frac{b}{\sigma^2}(s)ds)dt, \; y \in]l, r[$$

eine Skalierungsfunktion für X ist.