Übungen zur Stochastischen Analysis I
Blatt 10

Prof. K.T. Sturm, WS 2006/2007

20. Dezember 2006

Aufgabe 1

Sei $M := (M^{(1)}, \dots, M^{(d)})$ mit $M^{(i)} \in \mathcal{M}_{loc}$, $i = 1, \dots, d$. Definiere

$$\|M\|_t^* := \max_{0 \le s \le t} \|M_s\| \quad \text{und} \quad A_t := \sum_{i=1}^{d} \langle M^{(i)} \rangle_t; \quad 0 \le t < \infty.$$

Zeige, dass es für jedes $m > 0$ eine (nur von m abhängende) positive Konstante λ_m gibt, so dass für alle Stoppzeiten T gilt

$$\frac{1}{\lambda_m} \mathbb{E}[A_T^m] \le \mathbb{E}[\|M\|_T^*]^{2m} \le \lambda_m \mathbb{E}[A_T^m].$$

Aufgabe 2

Definiere für $f \in C_0(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \text{stetig}, \quad \lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0\}$

$$P_t f(x) = \mathbb{E} f(e^{-t/2} x + \sqrt{1 - e^{-t}} Z)$$

für eine $\mathcal{N}(0,1)$ verteilte Zufallsvariable Z. Zeige, dass die Familie $(P_t)_{t \ge 0}$ eine Fellerhalbgruppe ist.

Aufgabe 3

a) Zeige die folgende Form der starken Markov-Eigenschaft für die Brownsche Bewegung: Sei (B_t) eine d-dimensionale Brownsche Bewegung und T eine Stoppzeit mit $T < \infty$ fast sicher. Dann ist auch $(B_{T+t} - B_T)_t$ eine Brownsche Bewegung und unabhängig von $\mathcal{F}_T$.

b) Zeige, dass eine zweidimensionale Brownsche Bewegung fast sicher unendlich viel Zeit in jeder offenen Menge verbringt, dass heißt, das für alle offenen Mengen $A \subseteq \mathbb{R}^2,\ A \ne \emptyset$ gilt

$$\mathbb{P}\left[\int_0^\infty \mathbf{1}_A(B_t) dt = \infty\right] = 1$$

(Hinweis: Man kann die Resultate von Blatt 6 verwenden.)

Aufgabe 4

Sei B eine eindimensionale Brownsche Bewegung mit Startpunkt 0.

a) Zeige mit Hilfe der starken Markov-Eigenschaft der Brownschen Bewegung, dass die zu einer f.s. endlichen Stoppzeit T reflektierte Brownsche Bewegung, also der Prozess

$$\widetilde{B}_t := B_t \cdot \mathbf{1}_{\{t \le T\}} + (2B_T - B_t) \cdot \mathbf{1}_{\{t > T\}},$$

wieder eine standard Brownsche Bewegung ist.

b) Für alle $a \in \mathbb{R}$ sei $T_a := \inf\{t \ge 0 \ :\ B_t = a\}$. Zeige, dass dann gilt

$$\mathbb{P}[T_a \le t] = 2\mathbb{P}[B_t \ge a; T_a \le t] = 2\mathbb{P}[B_t \ge a] = \int_0^t \frac{a}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-a^2/2s} ds.$$

c) Sei $M_t := \max_{0 \le s \le t} B_s$. Zeige, dass für $a \in \mathbb{R}$ und $t > 0$ gilt

$$\mathbb{P}[M_t \in da] = \mathbb{P}[|B_t| \in da] = \mathbb{P}[M_t - B_t \in da].$$