Übungen zur Stochastischen Analysis I
Blatt 1

Prof. K.T. Sturm, WS 2006/2007

18. Oktober 2006

Augabe 1

Setze für $t > 0$ und $x, y \geq 0$

$$p_t^+(x, y) = p_t(x, y) + p_t(x, -y),$$

wobei $p_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(\frac{(x-y)2}{2t}\right)$ die Brownsche Übergangsdichte sei.

a) Zeige, dass durch $P_t^+(x, A) = \int_A p_t^+(x, y)dy$ eine Markovsche Übergangsfamilie definiert wird. (Man kann dabei die bekannten Eigenschaften der Brownschen Familie benutzen.)

b) Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung mit Startpunkt 0. Zeige, dass durch $(|B_t|)_{t\geq 0}$ ein Markovprozess zu der Übergangsfamilie $(P_t^+(x, A))_{t>0}$ definiert wird.

Aufgabe 2

Erinnern wir daran, dass eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ von endlicher Variation ist, wenn das Supremum

$$\sup_{a=t_0<\cdots<t_k=b} \sum_{i=1}^{k} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

endlich ist. Hierbei wird das Supremum über alle endlichen Zerlegungen von $[a, b]$ genommen. (Insbesondere sind C^1 Fumktionen von endlicher Variation.)

Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung mit Startpunkt 0. Betrachte für ein festes Interval $[a, b]$ und $n \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariable

$$X_n = \sum_{j=1}^{2^n} \left(B_{a+k(b-a)2^{-n}} - B_{a+(k-1)(b-a)2^{-n}}\right)^2$$

a) Berechne die Erwartung und die Varianz von X_n.

b) Zeige, dass für $n \to \infty$ die Folge X_n fast sicher konvergiert. Was ist der Limes? (Tipp: schnelle stochastische Konvergenz!)

c) Folgere, dass Brownsche Pfade fast sicher auf keinem Intervall $[a, b]$ von endlicher Variation sind.

Aufgabe 3

Gegeben sei ein filtrierter W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ und ein adaptierter, rechtsstetiger Prozess $X = (X_t)_{t\geq 0}$ mit Werten in einem topologischen Raum E. Zeige:

a) Für alle offenen $A \subset E$ ist $T_A^* = T_A$ eine schwache Stoppzeit.

b) Falls X stetig und E metrisierbar ist, so gilt für alle abgeschlossenen Teilmengen $A \subset E$, dass T_A eine Stoppzeit ist.

c) Sei $\Omega = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$, $X = (X_t)_{t\geq 0}$ der Koordinatenprozess auf Ω (d.h. $X_t(\omega) := \omega(t)$) und $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ die kanonische Filtration. Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ offen und nicht leer. Dann ist T_A^* eine schwache Stoppzeit, aber keine Stoppzeit.

Aufgabe 4

Gegeben sei eine Stoppzeit T bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Zeige:

a) $\mathcal{F}_T$ ist eine $\sigma-$Algebra und T ist $\mathcal{F}_T-$messbar.

b) Sei $\mathcal{G}_t := \mathcal{F}_{t+}$. Dann ist T eine schwache Stoppzeit bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ genau dann, wenn es eine Stoppzeit bezüglich $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ ist. Es gilt dann

$$\mathcal{F}_{T+} = \mathcal{G}_T.$$