Institut für angewandte Mathematik
Universität Bonn
Prof. Dr. K.-Th. Sturm
Hendrik Weber
http://www-wt.iam.uni-bonn.de/~sturm/vorlesungSS08/

Übungen zur Vorlesung Stochastische Prozesse

1. Präsenzübung vom 13.4.2008

Aufgabe 1 - Lemma von Borel-Cantelli

a) Wiederholt die Formulierung des Lemmas von Borel-Cantelli.

b) Seien X_i i.i.d. exponentialverteilte Zufallsvariablen Paramter λ. Zeige, dass fast sicher gilt

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} = 0, \qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} = \frac{1}{\lambda}.$$

Aufgabe 2 - Charakteristische Funktionen

a) Berechne die charakteristischen Funktionen der Normalverteilung, der uniformen Verteilung und der Cauchy-Verteilung.

b) Beweise im Fall der Normal- und der uniformen Verteilung durch explizite Rechnung mit den charakteristischen Funktionen die Aussage des zentralen Grenzwertsatzes. Warum funktioniert das für die Cauchy-Verteilung nicht?

c) Zeige, dass für unabhängige Cauchy-verteilte Zufallsvariablen X_i die Folge

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

in Verteilung konvergiert und bestimme die Grenzverteilung.

Aufgabe 3 - Konvergenzsätze

a) Wiederholt die wesentlichen Konvergenzsätze aus der Maßtheorie (Lebesguescher Konvergenzsatz, monotone Konvergenz, Lemma von Fatou)

b) Betrachte eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen ξ_i mit

$$\mathbb{P}[\xi_n = -n^2] = \frac{1}{n^2} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[\xi_n = \frac{n^2}{n^2-1}] = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

Zeige, dass gilt $\mathbb{E}\big[\sum_{i=1}^n \xi_i\big] = 0$ aber $\sum_{i=1}^n \xi_i \to +\infty$ fast sicher. Widerspricht das den oben genannten Konvergenzsätzen?