Institut für angewandte Mathematik
Universität Bonn
Prof. Dr. K.-Th. Sturm
Hendrik Weber
http://www-wt.iam.uni-bonn.de/~sturm/vorlesungSS08/

Übungen zur Vorlesung Stochastische Prozesse

8. Aufgabenblatt vom 06.06.2008

Aufgabe 1 - Stabilität der Normalverteilung (10 Punkte)

Sei $(\mu_n)_n$ eine Folge Gaußscher Maße auf $\mathbb{R}^d$ mit Kovarianzmatrizen Σ_n und Erwartungsvektoren v_n. Zeige, dass die Folge μ_n genau dann schwach konvergiert, wenn Σ_n gegen eine Matrix Σ und v_n gegen einen Vektor v konvergiert. Dann ist μ Gaußsch mit Kovarianz Σ und Erwartung v. Insbesondere ist der schwache Limes einer Folge von Gaußverteilungen immer eine Gaußverteilung.

Aufgabe 2 - Das Wiener - Integral (10 Punkte)

Sei $(B_t, t \geq 0)$ eine Brownsche Bewegung auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Definiere für eine Treppenfunktion $f(t) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \mathbf{1}_{]t_{i-1},t_i]}(t)$ mit $0 = t_0 < t_1 \ldots < t_p$ die Martingaltransformierte

$$I(f) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}).$$

a) Zeige, dass sich I auf eindeutige Art zu einer Isometrie $I\colon L^2(\mathbb{R}_+) \to L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ fortsetzt. Man schreibt auch $I(f) = \int_0^\infty f(t) dB_t$.

b) Bestimme die Verteilung von $I(f)$ für ein beliebiges Element $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$. Was ist $\mathrm{Cov}(I(f), I(g))$?

c) Zeige folgende partielle Integrationsformel: Wenn f zusätzlich stetig differenzierbar ist, gilt

$$\int_0^t f(s) dB_s := \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,t]}(s) f(s) dB_s = f(t)B_t - \int_0^t f'(s) B_s ds \qquad \mathbb{P}-\text{f.s.}.$$

Aufgabe 3 - Fraktionelle Brownsche Bewegung I (10 Punkte)

Sei $H \in (0,1)$ fest gewält. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass es einen zentrierten Gaußschen Prozess $(X(h), h \in L^2(\mathbb{R}))$ gibt mit $\mathbb{E}[X(h)X(g)] = \langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} f(s)g(s)ds$. Setze für $t \geq 0$

$$h_t(s) = \frac{1}{C(H)}((t-s)^+)^{H-\frac{1}{2}} - ((-s)^+)^{H-\frac{1}{2}}$$

wobei

$$C(H) = \int_0^\infty \Big(((t-s)^+)^{H-\frac{1}{2}} - ((-s)^+)^{H-\frac{1}{2}} \Big)^2 ds$$

(hierbei ist $x^+ = \max\{x, 0\}$). Zeige, dass der Prozess $(B_t, t \geq 0)$ mit $B_t = X(h_t)$ ein zentrierter Gaußscher Prozess mit Kovarianzfunktion

$$\Gamma(s,t) = \frac{1}{2}\Big(s^{2H} + t^{2H} - |t-s|^{2H}\Big)$$

ist.

Aufgabe 4 - Fraktionelle Brownsche Bewegung II (10 Punkte)

a) Zeige, dass der Prozess B_t aus Aufgabe 3 eine Modifikation $\tilde{B}_t$ hat, die γ -Hölderstetig für alle $\gamma < H$ ist.

b) Betrachte den Prozess der Inkremente $(X_n, n \geq 1)$ mit $X_n := B_n - B_{n-1}$. Zeige, dass B_n ein stationärer Gaußscher Prozess ist mit Kovarianz

$$\mathrm{Cov}(X_n, X_m) = \rho_H(n-m) = \frac{1}{2}\Big(((n-m)+1)^{2H} + ((n-m)-1)^{2H} - 2(n-m)^{2H}\Big).$$

Insbesondere sind X_n und X_m positiv korreliert für $H > \frac{1}{2}$ und negativ korreliert für $H < \frac{1}{2}$.