Institut für angewandte Mathematik
Universität Bonn
Prof. Dr. K.-Th. Sturm
Hendrik Weber
http://www-wt.iam.uni-bonn.de/~sturm/vorlesungSS08/

Übungen zur Vorlesung Stochastische Prozesse

7. Aufgabenblatt vom 30.5.2008

Aufgabe 1 - Unabhängigkeit Gaußscher Zufallsvariablen (10 Punkte)

a) Sei $(X_1, \dots, X_n)$ ein Gaußscher Zufallsvektor. Zeige, dass die X_i unabhängig sind, falls für alle $i \neq j$ gilt $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$.

b) Sei $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ verteilt und Z unabhängig davon mit $\mathbb{P}[Z = -1] = \mathbb{P}[Z = 1] = \frac{1}{2}$. Zeige, dass $Y = XZ$ auch nach $\mathcal{N}(0,1)$ verteilt ist, dass gilt $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, aber dass X und Y nicht unabhängig sind. Ist das ein Widerspruch zu der Aussage in Teil a) ?

Aufgabe 2 - Abgeleitete Verteilungen der Gaußschen Verteilung (10 Punkte)

Seien X und Y unabhängige $\mathcal{N}(0,1)$ – verteilte Zufallsvariablen. Berechne die Verteilungen von X^2, von $X^2 + Y^2$ und von $\frac{X^2}{X^2+Y^2}$.

Aufgabe 3 - Verallgemeinerung des Satzes von Kolmogorov – Chentsov (10 Punkte)

Sei $(X_t, t \in \mathbb{R}_+^d)$ ein stochastischer Prozess (ein Prozess mit d -dimensionaler Indexmenge heißt auch zufälliges Feld). Es gelte für positive Konstanten α, β und C

$$\mathbb{E}|X_t - X_s|^\alpha \leq C|t - s|^{d+\beta},$$

wobei $|t - s|$ den euklidischen Abstand bezeichne. Zeige, dass es dann eine Version von X gibt, die lokal Hölderstetig für jeden Exponent $\gamma < \frac{\beta}{\alpha}$ ist.

Aufgabe 4 - Brownsches Blatt(10 Punkte)

a) Zeige, dass es einen zentrierten Gaußschen Prozess $(B_{(x,y)}, (x, y) \in \mathbb{R}_+^2)$ mit der Kovarianzfunktion

$$\mathrm{Cov}(B_{(x_1,y_1)}, B_{(x_2,y_2)}) = (x_1 \wedge x_2)(y_1 \wedge y_2).$$

gibt.

b) Zeige mit Hilfe der Aussage aus Aufgabe 3, dass eine stetige Version von B existiert - diese heißt Brownsches Blatt.

c) Sei für ein fixes $x > 0$ die Kurve $\gamma^1(t) = (x, \frac{t}{x})$ und die Kurve $\gamma^2(t) = (e^t, e^{-t})$. Zeige, dass $(X_t = B_{\gamma^1(t)}, t \geq 0)$ eine Brownsche Bewegung und dass $(Y(t) = B_{\gamma^2(t)}, t \geq 0)$ ein Ornstein - Uhlenbeck Prozess ist.