Institut für angewandte Mathematik
Universität Bonn
Prof. Dr. K.-Th. Sturm
Hendrik Weber
http://www-wt.iam.uni-bonn.de/~sturm/vorlesungSS08/

Übungen zur Vorlesung Stochastische Prozesse

5. Aufgabenblatt vom 9.5.2008

Aufgabe 1 - Gleichgradige Integrierbarkeit II (10 Punkte)

a) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Bezeichne $\mathbb{F}$ die Menge aller Unter-Sigma-Algebren von $\mathcal{F}$. Zeige, dass die Menge $\{\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] : \mathcal{G} \in \mathbb{F}\}$ gleichgradig integrierbar ist.

b) Zeige, dass ein Martingal (X_n) genau dann abgeschlossen ist, wenn die Menge $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar ist.
Erinnerung: Ein Martingal $(X_n)_n$ heißt abgeschlossen, wenn es eine Zufallsvarible X gibt mit $X_n = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$.

Aufgabe 2 - Lokalzeiten (10 Punkte)

Sei $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ mit ξ_i i.i.d. und $\mathbb{P}[\xi_i = 1] = \mathbb{P}[\xi_i = -1] = \frac{1}{2}$ (gewöhnlicher Random Walk). Zeige, dass die Doobzerlegung von $(|S_n|)_n$ gegeben ist durch

$$|S_n| = M_n + A_n,$$

wobei M_n ein Martingal ist und $A_n = \#\{i \leq n-1 \colon S_n = 0\}$ (die Lokalzeit von S_n in 0). Berechne $\mathbb{E}[|S_n|]$.

Aufgabe 3 - Beweis des Gesetzes der großen Zahlen mit Martingalen (10 Punkte)

a) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_n] = 0 \quad \forall n$ und

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\mathrm{Var}(X_n)}{n^2} < \infty$$

Zeige, mit Hilfe des Martingalkonvergenzsatzes, dass $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ fast sicher und in L^1 gegen 0 konvergiert.

b) Sei nun X_i eine Folge von integrierbaren i.i.d. Zufallsvariablen. Setze $Y_n = X_n \mathbf{1}_{\{|X_n|\leq n\}}$. Zeige, dass
   - $\mathbb{E}[Y_n] \to \mathbb{E}[X_1]$ für $n \to \infty$.
   - $\mathbb{P}\big[\exists n \geq 1 : \forall k \geq n, X_k = Y_k\big] = 1$
   - $\sum_{n\geq 1} \frac{\mathrm{Var}(Y_n)}{n^2} < \infty$.

   Folgere das starke Gesetz der großen Zahlen.

Aufgabe 4 - Trefferzeiten für den zweidimensionalen random walk (10 Punkte)

Z_n sei der Random Walk auf dem zweidimensionalen Gitter, der in z_0 startet und mit gleicher Wahrscheinlichkeit einen Schritt in eine der vier Richtungen macht.

a) Zeige, dass $|Z_n|^2 - n$ ein Martingal ist.

b) Für $R > 0$ mit $|z_0| \leq R$ sei
$$T \ := \ \inf\{n \geq 0 \,|\, |Z_n|^2 \geq R^2\}$$
die Austrittszeit aus dem Kreis um 0 mit Radius R. Zeige:
$$R^2 - |z_0|^2 \ \leq \ E[T] \ \leq \ (R+1)^2 - |z_0|^2\,.$$